

Fizika: priručnik s riješenim zadacima

Robert Pezer

Izvanredni profesor

Sveučilište u Zagrebu Metalurški fakultet
01.10.2019.

O korištenju priručnika

Ovaj tekst predstavlja pomoć autora studentima kao dodatni recenzirani nastavni materijal koji se može koristiti isključivo u okviru nastave iz kolegija Fizika na Metalurškom fakultetu. Nije dozvoljeno umnožavanje niti dijeljenje ovog materijala u cjelini, a niti u dijelovima.

Priručnik je namijenjen osobnoj upotrebi studenata upisanih na kolegij Fizika i ne smije se objavljivati niti ponovno koristiti u bilo kojem obliku bez pisanoga pristanka autora. Materijali su namijenjeni kao dopuna i nisu zamjena za propisanu obveznu literaturu kolegija.

Sadržaj

Popis slika	6
1 Uvod, znanost i mjerenje	1
1.1 Predgovor	1
2 Newtonovi zakoni	7
2.1 Uvod	7
2.2 Kinematika 1D	9
2.2.1 Dijagrami	13
2.2.2 Određivanje pomaka iz brzine	14
2.2.3 Jednoliko ubrzano gibanje	16
2.2.4 Jednoliko ubrzano gibanje i jednačbe	18
2.3 Kinematika 2D	26
2.3.1 Ubrzanje	26
2.3.2 Kosi hitac	31
2.3.3 Inercijalni sustavi	33
2.3.4 Kutna brzina	38
2.4 Zakoni gibanja	42
2.4.1 Koncept sile	42

2.4.2	Sila i dijagrami slobodnog tijela	43
2.4.3	Newtonovi zakoni	43
3	Zakoni očuvanja	59
3.1	Impuls sile i količina gibanja	59
3.2	Očuvanje količine gibanja	60
3.2.1	Koeficijent restitucije	64
3.3	Očuvanje mehaničke energije	64
3.3.1	Koncept energije i promjena oblika	64
3.3.2	Kinetička energije	67
3.3.3	Teorem rada i kinetičke energije	67
4	Primjena Newtonovih zakona - gravitacija, tijela, oscilacije i elastičnost	81
4.1	Opći zakon gravitacije	81
4.2	Vrtnja krutog tijela	84
4.2.1	Moment inercije	85
4.3	Centar mase	87
4.3.1	Centar mase i potencijalna energija	89
4.4	Zakoni gibanja	89
4.4.1	Gibanje CM	89
4.4.2	Moment sile	90
4.4.3	Dinamika vrtnje	92
4.4.4	Zakoni očuvanja i vrtnja	93
4.4.5	Kotrljanje	94
4.5	Ravnoteža, elastičnost i struktura tvari	101

<i>SADRŽAJ</i>	5
5 Titranje i valovi	113
5.1 Titranje	113
5.1.1 Titranje i energija	115
5.1.2 Njihala	120
5.1.3 Prigušeno titranje	123
5.2 Valovi	125
5.2.1 Model vala	126
5.2.2 Brzina vala	128
5.2.3 Energija i snaga vala	133
5.2.4 Stojni valovi	136
A Praktična dopuna	139
A.1 Rješavanje problema	139
A.2 Pregled osnovnih vještina u fizici	141
<i>Bibliografija</i>	147
<i>Kazalo</i>	148

Popis slika

2.1	Jednoliko gibanje po pravcu	10
2.2	Jednoliko gibanje - zadatak	13
2.3	Određivanje pomaka iz poznate brzine - 1D	15
2.4	Jednoliko ubrzano gibanje - automobil/borbeni zrakoplov	16
2.5	Jednoliko ubrzano gibanje - automobil/borbeni zrakoplov: v-t dijagram	17
2.6	Pomak kao površina	19
2.7	Kinematika poskakujuće loptice	23
2.8	Kinematika: vertikalni hitac	25
2.9	Kinematika: jednoliko kružno gibanje	26
2.10	Kinematika: 2D gibanje	28
2.11	Kinematika: složenije 2D gibanje	29
2.12	Gibanje projektila	31
2.13	Gibanje projektila: skok u dalj	32
2.14	Inercijalni sustavi	34
2.15	Inercijalni sustavi: plovidba preko rijeke	35
2.16	Jednoliko kružno gibanje: vektor brzine	37
2.17	Polarni koordinatni sustav	38
2.18	Jednoliko kružno gibanje: brzina	39

2.19 Ubrzano gibanje: brzina i ubrzanje kao vektori	40
2.20 Ubrzano gibanje: brzina i ubrzanje kao vektori	41
2.21 Kosina: problem više tijela i dijagram slobodnog tijela	43
2.22 Naslovnica: Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica	45
2.23 Cesta s nagibom: zavoj	46
2.24 Dizalo: dinamika pri vožnji gore/dolje	48
2.25 Atwoodov padostroj i analiza	50
2.26 Kosina - primjer	52
3.1 Snimka deformacije loptice tijekom sraza s batom	60
3.2 Dijagram slobodnog tijela - povlačenje kutije	71
3.3 Dijagram slobodnog tijela - povlačenje kutije	73
3.4 Balističko njihalo	79
4.1 Primjer određivanja centra mase.	88
4.2 Moment sile i vrtnja.	91
4.3 Primjer - energija krutog tijela pri vrtnji.	94
4.4 Primjer - energija krutog tijela pri kotrljanju.	95
4.5 Primjer - momenti sile i kritični fenomen.	97
4.6 Naprezanje/deformacija.	102
4.7 Primjer - statika	103
4.8 Primjer - statika u slučaju rešetkastog nosača	105
4.9 Primjer - smicanje i spoj jezičac-utor	111
5.1 Jednostavni harmonički oscilator	114
5.2 Matematičko njihalo	120

5.3 Fizičko njihalo	122
5.4 Konstruktivna i destruktivna interferencija	127
5.5 Stojni valovi	137

Poglavlje 1

Uvod, znanost i mjerenje

"Research is to see what everybody else has seen, and to think what nobody else has thought."

- Albert Szent-Györgyi

1.1 Predgovor

Ovaj priručnik s riješenim zadacima je napisan kao dopuna osvježenje standardne literature koja se koristi u predmetu Fizika na preddiplomskom studiju "METALURGIJA" i "SIGURNOST, ZDRAVLJE NA RADU I RADNI OKOLIŠ" Metalurškog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Očekuje se predznanje iz predmeta matematika, fizika i kemija na osnovnoj srednjoškolskoj razini (aritmetika, algebra, trigonometrija, elementarna geometrija, osnovna znanja o prostoru, gibanju, tvari i fizičkim veličinama). Priručnik nije zamjena za literaturu preporučenu u okviru programa ovog i sličnih kolegija te nije zamjena sustavnom izlaganju za takvu svrhu napisanog udžbenika. Ovaj tekst je rezultat rada autora sa studentima Metalurškog fakulteta i njihovim učestalim teškoćama s konceptualnim i operativnim razumijevanjem elemenata gradiva presudnih za uspješno usvajanje znanja i vještina koje predviđa program kolegija. Osim standardnog izlaganja ovaj priručnik donosi i niz prijedloga za korištenje dodatnih aktivnosti s ciljem prilagodbe materijala različitim pristupima u učenju. Za fiziku kao opću prirodnu znanost koja promatra i opisuje veliki broj vrlo različitih fenomena nije jednostavno obaviti primjeren

odabir tema i način izlaganja koji bi bio za većinu studenata optimalan.

Razvoj i proučavanje procesa obrazovanja iz područja fizike je u posljednjih tridesetak godina pred zajednicu je iznijelo neke potpuno neočekivane rezultate. Klasična nastava, gdje se kroz narativ iznosi cjelina za cjelinom uz prikazivanje sadržaja ili pisanje po ploči, nije dobro prošla prema rezultatima istraživanja. Pokazalo se da je "dodana vrijednost" takve nastave iznimno niska, a posebno ne doprinosi povećanoj uspješnosti u slučaju studenata s iznimno niskim predznanjem. Osvježavanje relativno starijih udžbenika [3, 4] se također pokazalo korisnim i u sadržajnom i u metodološkom smislu. Jedan od problema ovih udžbenika je i relativno zahtjevna razina matematičke i opće znanstvene pismenosti koja se pretpostavlja kod studenata. Mogućnost koja se pruža u posljednje vrijeme je dostupnost otvorenih digitalnih sadržaja koji omogućavaju povezivanje fizičkih i numeričkih problema s kompjutorskim simulacijama. Upravo su ovo jedni od uspješnijih alata proizašlih iz informacijskog doba u poboljšavanju postizanja ishoda učenja. Veliki projekti poput PhET i OSP

PhET Interactive Simulations	Open Source Physics (OSP)
University of Colorado	Davidson College (hosting and support)
http://phet.colorado.edu	http://www.compadre.org/osp/

predstavljaju najbolje primjere takvih aktivnosti u pokušaju iznalaženja učinkovitijih metoda poučavanja prirodnih znanosti u visokoškolskom obrazovanju. Numerički zadaci su inspirirani velikim brojem tipskih problema koji se koriste u nastavi fizike za inženjere pri čemu su rješenja prilagođena razini ovog predmeta. Uz cjeline će se predlagati i konkretne aktivnosti koje se mogu potpuno besplatno obavljati na prije navedenim platformama.

Studij metalurgije i srodnih područja je u međudjelovanju s fizikom iznjedrio je znanost o materijalima slijedom niza poveznica značajki materijala općenito i metalnih legura. Za više pojedinosti pogledajte tekst velikana metalurgije prof. R. W. Cahna, Sveučilišta Cambridge [2] u okviru prestižnog David Turnbull izlaganja 2002.god. u Bostonu <http://www.mrs.org/turnbull>. Fizika je korijen svakog inženjerstva tako da ćemo u izlaganjima navoditi primjere tog odnosa prikazujući kako je rad mehaničkih naprava utemeljen na fundamentalnim zakonima fizike. U poglavlju posvećenom elastičnim značajkama kratko ćemo navesti i osnovne činjenice o tvari i atomskoj strukturi.

Teme poglavlja 2 su Newtonovi zakoni i klasična mehanika kao disciplina općenito:

- koncepti gibanja
- gibanje u 1D
- koordinatni sustavi i vektori
- kinematika u 2D
- kinematika u 3D i odabrani primjeri

Pitanja koja će se razmatrati u poglavlju 3 o zakonima sačuvanja odražavaju dubinsku važnost u prirodnim pojavama na svim skalama (od veličine atoma do čitavog univerzuma):

- Zakon sačuvanja količine gibanja
- Rad i sila
- Zakon sačuvanja energije
- Teorem rada i kinetičke energije

Pitanja koja će se razmatrati u poglavlju 4 opisuju tipične primjene Newtonovih zakona relevantne za inženjerske discipline:

- trenje i posljedice trenja oko nas
- opis sudara
- kruta tijela i protežnost
- statika
- oscilacije
- mehanički valovi

Objašnjenja ovih i sličnih pitanja sa stajališta fizike su predmet ovog priručnika. Problemi preciznog razumijevanja gibanja, optimalnoga skupa fizičkih veličina i njihova međusobnog odnosa bile su problem tisućama godina iako su ljudi od početaka civilizacije bili životno zainteresirani za precizno objašnjenje dubinske prirode gibanja i njegovih uzroka. Proces odgonetavanja je bio mukotrpan i nejednolik, a kulminirao je objavom Principie Isaaca Newtona 5. lipnja 1687. godine. Sljedeća stoljeća su pokazala neočekivani doseg Newtonove teorije i niz znanstvenika su uspjeli pronaći ingeniozne načine primjene na proučavanje gibanja tijela, fluida i molekula. U tehničkoj primjeni dobila je i kontinuiranu inačicu te postala temelj modernog inženjerstva.

Program kolegija "Fizika" obuhvaća sljedeće teme (u zagradi je naveden približan broj sati nastave):

Kinematika 1D: matematička dopuna. Kinematika: položaj, brzina i ubrzanje. Jednoliko ubrzano gibanje. (4)

Kinematika 2D: vektori i položaj materijalne točke u 2D i 3D. Pojam brzine i ubrzanja u 3D. (4) Kosi hitac i granični slučajevi (vertikalni i horizontalni). Inercijalni sustavi. Opažanje u fizici. (4)

Newtonovi zakoni: sila kao vektor. Pojmovi količine gibanja, impulsa sile i energije. (5) Newtonovi zakoni: objašnjenje svakog od zakona uz detaljno opisivanje smisla i posljedica koje iz zakona proizlaze. Prikaz zakona na nekoliko karakterističnih sistema koji potiču konceptualno razumijevanje. Dijagram slobodnog tijela. (5)

Primjena Newtonovih zakona: zakoni gibanja i mehanika: trenje (statičko i dinamičko), razne varijante kosina, jednostavnih strojeva i povezanih tijela, centripetalna sila, gravitacija, gibanje satelita, kutna brzina, moment inercije. (7)

Zakoni sačuvanja: Primjena zakona gibanja: sudari, zakoni sačuvanja količine gibanja i energije, kružno gibanje (kinematika i moment inercije), moment sile, moment količine gibanja i opis vrtnje tijela. Teorem rada i kinetičke energije. (6)

Ravnoteža i elastičnost: ravnoteža – vanjske sile i momenta sile, elastična sila, Hookeov zakon, mikroskopska struktura tvari, naprezanja i deformacije, vlačno naprezanje, tlačno naprezanje, torzija. (5)

Periodično gibanje, oscilacije: periodične pojave, titranje, proučavanje gibanja mase na elastičnoj opruzi, razmatranje jednadžbe gibanja kao diferencijalne jednadžbe, harmonički oscilator, veličine, veza s jednolikim kružnim gibanjem. (6) Analiza gušenja oscilacija (utjecaj trenja). male oscilacije i njihala, fizičko njihalo, analogije. (4)

Periodično gibanje i valovi: periodične pojave, titranje i valovi, primjeri iz prirode uz razmatranje prijenosa energije, harmonički oscilator i veza s valovima, opis brzine širenja vala, pulsovi, vrste valova i matematički opis. (5)

Mjerenje i obrada podataka: znanstvena metoda, eksperiment, statistička analiza, osnovne veličine statističke analize, račun pogreški, regresije. (4)

Poglavlje 2

Newtonovi zakoni

"I can calculate the motion of heavenly bodies, but not the madness of people."

- Isaac Newton

2.1 Uvod

Promatranjem svijeta oko nas zapažamo da se nešto mijenja, a nešto ne. Dio promjena je povezan s biološkim procesima, dio s kemijskim, dio s geološkim, a dio promjena je povezan s promjenom mjesta - gibanjem. Ova zadnja promjena je tema ovog poglavlja i uglavnom ćemo se pozabaviti s dva ključna pitanja razumijevanja gibanja. Prvo pitanje je kako uopće opisati gibanje i tu ćemo u pomoć pozvati matematiku te ćemo problem razvijati od primjera gibanja u jednoj dimenziji, a nakon još dodatne matematike i u više dimenzija. Matematički opis gibanja nazivamo *kinematika*. Drugo pitanje se tiče uzroka opaženoga gibanja. Zašto kapi kiše padaju na površinu zemlje radije nego da odlete u svemirsko prostranstvo. Zašto se suhi list i kamen gibaju na različit način tijekom slobodnog pada u zraku. Osnovno pitanje fizike je da li postoji neka univezalna pravilnost koju je moguće matematički izraziti, a upravlja nevjerojatnom raznolikošću pojava gibanja oko nas. Precizno matematički formuliranu zakonitost uzroka gibanja nazivamo *dinamika*. Ideal je da se na osnovu opisa trenutnog stanja gibanja može precizno predvidjeti budućnost - putanja. Jedan od vrlo važnih alata u toj analizi bit

će pojednostavljeni *fizički model* s obzirom na nevjerojatnu složenost pojava oko nas. *Model* je pojednostavljen opis stvarnosti koji uzima samo one elemente koji su nužni za razumijevanje cilja proučavanja nekog fenomena. Npr pri opisu gibanja planeta oko Sunca često ih promatramo kao bezlične materijalne točke bez ikakva oblika ili protežnosti. Ova činjenica je osnova praktične vrijednosti znanosti općenito. Veliki fizičar A. Einstein je ovu činjenicu sažeo u sljedeću rečenicu:

"The most incomprehensible thing about the world is that it is comprehensible."

Vrijednost jedne grane fizike *mehanike*, znanosti o gibanju, leži u njenoj začuđujućoj eleganciji i širini primjene. Iako ju je otkrio i precizno matematički formulirao prije više od 300 godina fizičar Isaac Newton, usprkos stoljećima, primjenjuje se u gotovo svim područjima inženjerstva i znanosti. O briljantnosti samog Newtona najbolje govori podatak da je za potrebu formuliranja teorije mehanike "morao izmisliti" i sasvim novu granu matematike koju danas poznajemo kao diferencijalni i integralni račun¹, a to je upravo temelj općeg obrazovanja inženjera u svim područjima tehnike.

Broj protona i neutrona u atomu je vezan s *atomsom masom* elementa koja se definira kao omjer mase atoma i *atomske jedinice mase* $1 u = 1.6605387 \times 10^{-27} \text{ kg}$. Napominjemo da omjer atomskih masa nije jednak omjeru gustoća! Razlog je zbog različitih međuatomskih udaljenosti i načina slaganja atoma u kristalu.

Primjer 2.1 (Omjeri). Kocka Al (gustoća 2.70 g/cm^3) je volumena 0.200 cm^3 . Poznato je da 27.0 g Al sadrže 6.02×10^{23} atoma. Koliko je atoma sadržano u kocki?

Rješenje Masa kocke iznosi:

$$m = \rho V = (2.70 \text{ g/cm}^3)(0.200 \text{ cm}^3) = 0.540 \text{ g}$$

Za rješavanje ovog problema iskoristit ćemo vrlo elegantnu metodu koja se zasniva na činjenici da je masa uzorka proporcionalna broju atoma za čiste elemente. Koristiti ćemo izraz $m = kN$ gdje smo s k označili konstantu proporcionalnosti, a s N broj atoma.

¹Otkriće diferencijalnog i integralnog računa je ostvario neovisno i gotovo istodobno s velikim njemačkim matematičarom G.W. Leibnizom koji je dao iznimne doprinose i u fizici i tehnologiji. Posebno je značajno da je Leibniz prvi razvio teoriju o gibanju zasnovanu na kinetičkoj i potencijalnoj energiji, spekulirajući o zakonu očuvanja te ispravno pretpostavio relativnost prostora i vremena u skladu s kasnijim otkrićima A. Einsteina.

Ovaj izraz možemo primijeniti u oba slučaja:

$$\left. \begin{aligned} m_{uz} &= kN_{uz} \\ m_{27g} &= kN_{27g} \end{aligned} \right\} /$$

Dijeljenjem dobivamo (konstanta proporcionalnosti k se krati u računu i nije ju potrebno odrediti):

$$\frac{m_{uz}}{m_{27g}} = \frac{N_{uz}}{N_{27g}} \Rightarrow N_{uz} = \frac{m_{uz}}{m_{27g}} N_{27g} = \frac{0.540 \text{ g}}{27 \text{ g}} (6.02 \times 10^{23}) = 1.20 \times 10^{22}$$



Jedna od osnovnih tehnika koju je potrebno svladati za učinkovitu primjenu fizike u inženjerskoj praksi je lagodno korištenje različitih mjernih jedinica i sposobnost konverzije. Pogledajmo na jednostavnom primjeru postupak pretvorbe.

Primjer 2.2 (Brzina i mjerne jedinice). Na autocesti automobil se kreće brzinom 38.0 m/s. Da li je prekoračio dopuštenu maksimalnu brzinu od 130 km/h?

Rješenje U ovom problemu od rješenja nas samo dijeli pretvorba iz m/s u km/h :

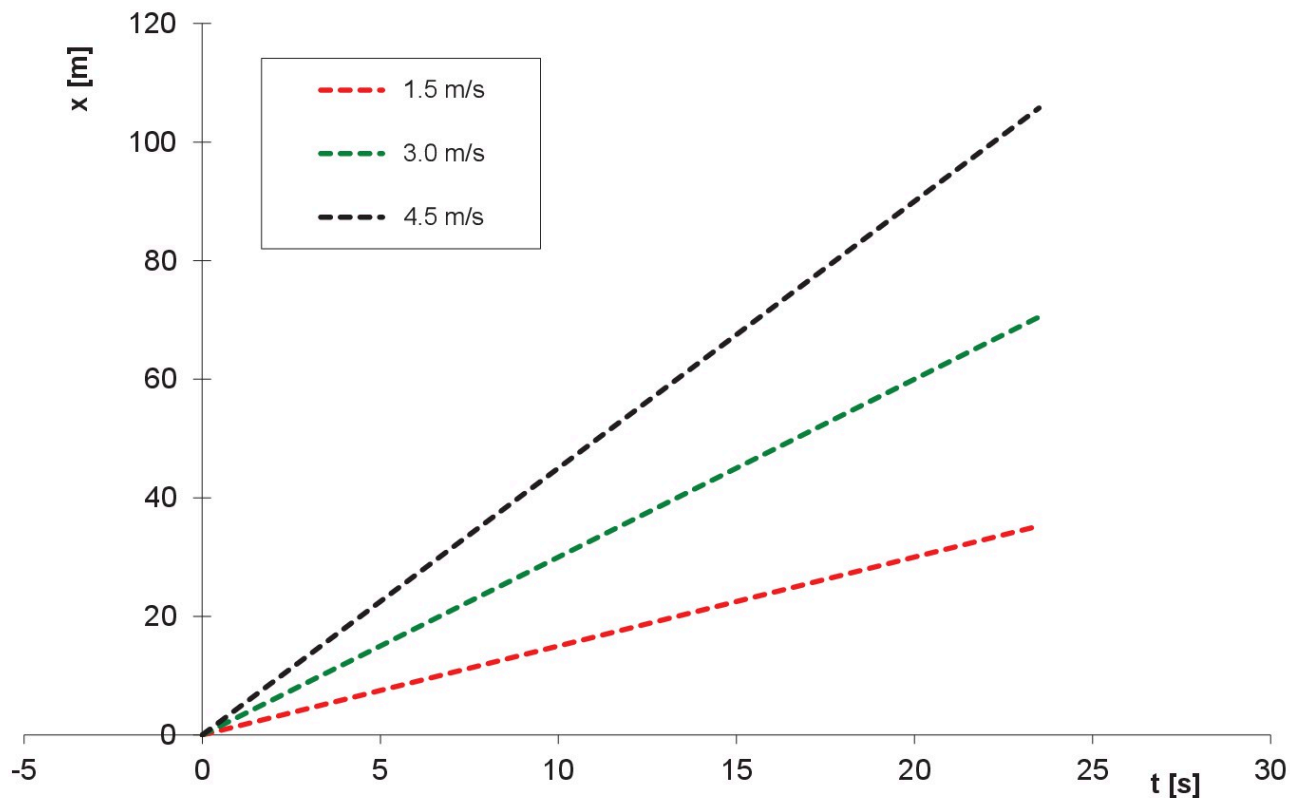
$$38.0 \text{ m/s} = 38.0 \frac{10^{-3} \text{ km}}{60^{-1} \text{ min}} = 38.0 \frac{10^{-3} \text{ km}}{60^{-2} \text{ h}} = 38.0 \frac{3600}{1000} \text{ km/h} = 137 \text{ km/h}$$

prema tome odgovor je DA. Primjetite da je brzina izražena u m/s intuitivnija za opis objektivne stvarnosti gibanja brzinama većim od 130 km/h. Naime, prijeći 38 m za samo jednu sekundu zorno prikazuje nemogućnost reakcije na iznenadni događaj u zoni preko deset metara.



2.2 Kinematika 1D

Pravocrtno gibanje je najjednostavniji slučaj koji ima veliku praktičnu i konceptijsku važnost jer se oko nas često javlja, a matematički je najjednostavnije za proučavanje tako da je odlična tema za uvođenje pojmova i elemenata opisa općenitog gibanja. *Jednoliko gibanje* je najjednostavniji primjer i označava slučaj kada u jednakim vremenskim



Slika 2.1: Jednoliko gibanje po pravcu: prikaz grafa položaja (tzv x - t) za gibanje stalnom brzinom u tri slučaja. Nagib pravca odgovara brzini gibanja - što je nagib veći veća je i brzina. x os je navedena kao primjer i umjesto nje može stajati bilo koja druga prostorna os sustava koju promatramo.

intervalima tijelo prelazi isti pomak. Kao što je vidljivo na slici 2.1 x - t graf pri gibanju stalnom brzinom je pravac. Vrijedi i obrnuti zaključak: ako je x - t (ili y,z - t) graf nekog gibanja pravac ono je jednoliko. Brzina je mjera pomaka u odnosu na vrijeme i definira se sljedećom relacijom:

$$\langle v \rangle \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

ovaj izraz strogo uzevši definira *srednju brzinu* kao omjer pomaka Δx i protekloga vremena Δt . Gledano sa stajališta modeliranja gibanja zadavanjem funkcije položaja točke na brojevnom pravcu u ovisnosti o vremenu možemo općenito zapisati matematički izraz za jednoliko gibanje:

$$x(t) = x_0 + vt \quad (2.1)$$

koje ima vrlo jednostavnu interpretaciju. x_0 je položaj u trenutku $t = 0$, a brzina (konstanta gibanja) može biti pozitivan i negativan broj ovisno da li se točka giba u pozitivnom

ili negativnom smjeru pravca. Primijetimo da je potpuno nevažno o kojoj se osi radi, umjesto x -osi mogli smo staviti y, z . Realno, model jednodimenzionalnog gibanja je redukcija pogodnim odabirom koordinatnog sustava stvarnog 3D gibanja. Promotrimo sada ovo jednostavnu teoriju u analizi jednog tipičnog problema s jednolikim gibanjem.

Primjer 2.3 (Susret na ručku.). Branko i Suzana žive u US i krenu u 09:00 sati jedan u susret drugome. Branko putuje jednolikom brzinom 60 mph u smjeru istoka iz Chicaga. Iz 400 milja udaljenog Pittsburgha Suzana se vozi u smjeru zapada istom cestom stalnom brzinom 40 mph. Gdje će se susresti?

Rješenje Ovo je prvi problem koji omogućava uključivanje svih koraka iz strategije rješavanja problema A.1 na str. 140. Prvi korak je modeliranje osoba kao čestica koje se gibaju jednoliko na pravcu. Upravo smo uveli izraz (2.1) koji omogućava preciznu matematičku formulaciju rješenja ovog problema. Iako je zadano vrijeme istodobnoga polaska u analizi možemo zadati početak vožnje jednostavno kao $t = 0$ h. Nadalje imamo slobodu za postavljanje ishodišta brojevnog pravca te se ovdje odlučujemo za polazište Branka. Obzirom da se gibaju u suprotnom smjeru moramo biti oprezni s predznakom brzina - jedna mora biti negativan broj! Tako možemo zapisati

$$\begin{aligned}x_B(t) &= x_{B0} + v_B t = v_B t \\x_S(t) &= x_{S0} + v_S t\end{aligned}$$

Desna strana ove jednadžbe je zadana podacima u zadatku (ispustili smo opće veličine koje ne utječu na rezultat prema odabranom modelu), jedino je preostalo kako kvantitativno zadati uvjet susreta. Susret znači da su u nekom trenutku i Branko i Suzana na istom mjestu. Označimo tren susreta s t_1 - trenutno nepoznata veličina. Uvjet susreta možemo zadati kao sljedeću jednadžbu:

$$x_B(t_1) = x_S(t_1)$$

što predstavlja matematičku reprezentaciju susreta u ovom problemu. Uvrštenjem imamo:

$$v_B t_1 = x_{S0} + v_S t_1$$

jedna jednadžba s jednom nepoznanicom koju je jednostavno riješiti:

$$t_1 = \frac{x_{S0}}{v_B - v_S}$$

Mjesto susreta dobijemo uvrštavanjem t_1 kao argumenta funkcije položaja Branka:

$$x_B(t_1) = v_B t_1 = v_B \frac{x_{S0}}{v_B - v_S} = (60 \text{ mph}) \frac{400 \text{ mi}}{(60 \text{ mph}) - (-40 \text{ mph})} = 240 \text{ mi}$$

pri čemu posebno treba biti pažljiv s mjernim jedinicama i predznakom za brzinu Suzane! Sada možemo konačno izreći rješenje problema: susret će se dogoditi 240 mi istočno od Chicaga jer smo tako zadali koordinatni sustav (Chicago je u ishodištu brojevnog pravca).

Provjera: Jedan od koraka koje studenti početnici, na svoju štetu, često preskaču je analiza rezultata. Analiza i interpretacija u odnosu na opažanje je srž fizike i onoga što kao kompetenciju ova znanost nudi inženjerima i općoj populaciji. Jedan od razloga uspjeha fizike je rigorozna provjera tvrdnji i rezultata uz istodobnu spremnost ispravljanja pogrešaka i usavršavanja teorija. Prva provjera se odnosi na mjerne jedinice koje u ovom problemu nije teško pratiti - osnovni rezultat je:

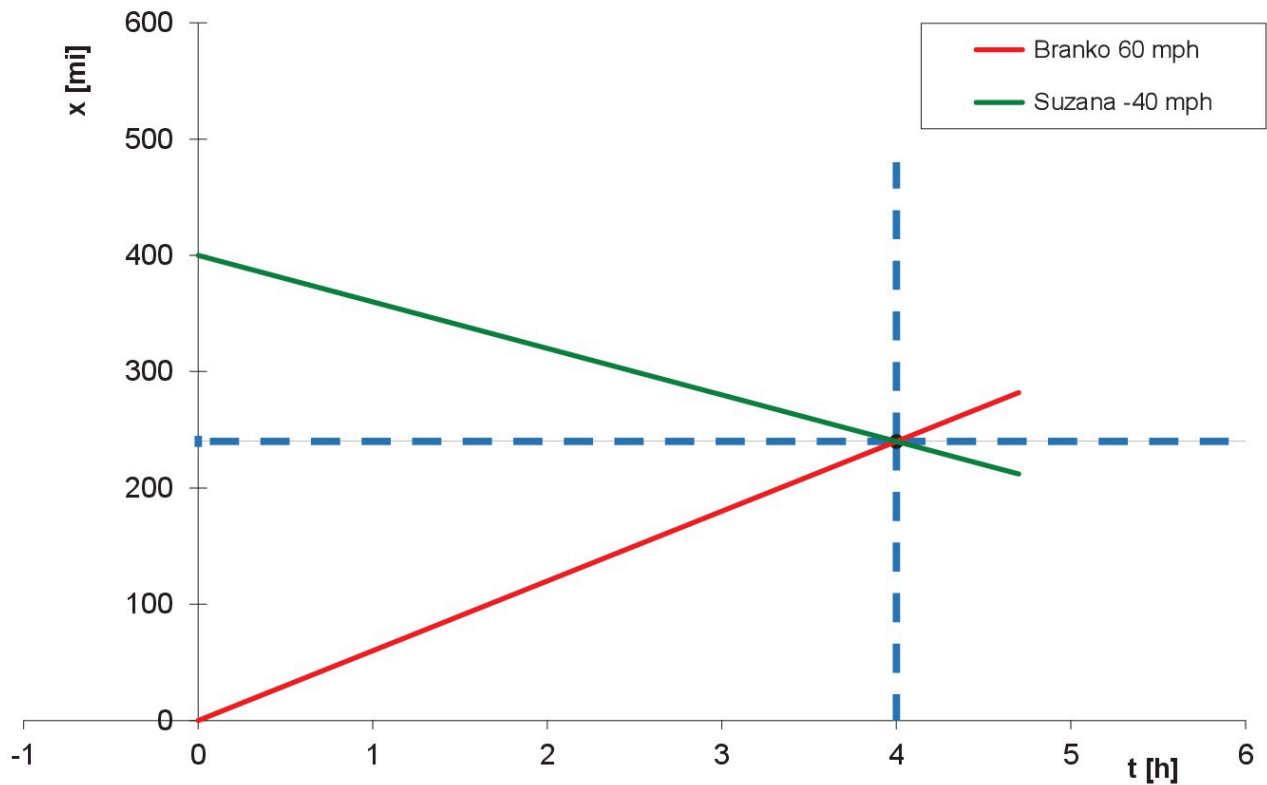
$$x_B(t_1) = v_B \frac{x_{S0}}{v_B - v_S} = \frac{v_B}{v_B - v_S} x_{S0}$$

koji ovako napisan jasno ukazuje da je konačna dimenzija rezultata duljina (ovdje izražena u miljama) obzirom da je razlomak bezdimenzionalan.

Druga provjera je usklađenost rezultata sa svakodnevnim iskustvom u ovakvom slučaju. Što bismo očekivali bez kinematičkih relacija? Branko i Suzana kreću jedan drugome u susret. Ako bi se kretali istom brzinom susreli bi se točno na polovini puta 200 mi. Obzirom da se Branko kreće nešto brže susret je bliže polazištu Suzane (Pittsburghu), a to upravo odgovara rezultatu. Zamislimo da pogriješimo u predznaku brzine Suzane (čest slučaj). Dobili bismo sljedeći rezultat:

$$x_B(t_1) = v_B t_1 = v_B \frac{x_{S0}}{v_B - v_S} = (60 \text{ mph}) \frac{400 \text{ mi}}{(60 \text{ mph}) - (+40 \text{ mph})} = \cancel{1200} \text{ mi}$$

Ukoliko provedemo postupak provjere i zamislimo što ovakav rezultat znači jasno vidimo da je ovaj rezultat nemoguć. Ipak, iskustvo autora je da ovakvo rješenje nije rijedak slučaj, a posljedica je slijepog oslanjanja na matematiku u rješavanju i interpretaciji iako ona "nema pojma" što nam brojevi predstavljaju. Matematika ne može izravno pomoći u otklanjanju pogreške ukoliko smo ju pogrešno "informirali". U ovom slučaju je matematički izračun točan, a fizički rezultat besmislen. ◀



Slika 2.2: Jednoliko gibanje: prikaz grafa položaja za gibanje Branka i Suzane prema zadatku (2.3). Vertikalna crtkana linija označava vrijeme, a horizontalna mjesto susreta.

2.2.1 Dijagrami

Gibanje je centralna tema fizike, prirodnih i tehničkih znanosti općenito. Ono je tema koju iskušava svako živo biće koje se kreće. Unatoč velikom iskustvu koje imamo vezano uz gibanje činjenica je da intuitivno neki od suptilnih elemenata preciznog opisa pogrešno interpretiramo. Ove pogrešne predodžbe su jedna od najvažnijih poteškoća u razumijevanju fizičkih fenomena na inženjerski upotrebljiv način. U bezbroju različitih mogućnosti gibanja ističu se sljedeća kao gradivni blokovi općeg razumijevanja i za točke i za tijela

1. pravocrtno
2. kružno
3. gibanje projektila

4. vrtnja krutog tijela

Gibanje možemo definirati kao promjenu položaja objekta u ovisnosti o vremenu. Ovdje odmah možemo primijetiti da je znatno teže opisati gibanje tijela od *materijalne točke* zato što različiti dijelovi tijela opisuju vrlo različite *putanje*. Ovo je razlog da se na početku bavimo onim situacijama gdje protežno tijelo možemo zamijeniti *materijalnom točkom*. Primjer za to je gibanje planeta gdje gibanje oko Sunca pratimo na način da gledamo gibanje posebno odabrane točke vezane za nebesko tijelo. Ovo je ujedno primjer kako modeliramo pojednostavljenjem: cijeli planet koji u promjeru može biti veći od 10 000 km gledamo kao točku!

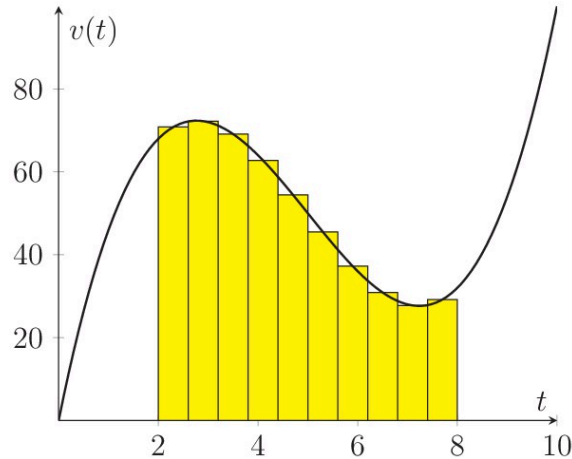
Jednostavan način promatranja gibanja (posebno s dostupnošću sofisticirane tehnologije) je snimanje filma koji predstavlja fotografiranje pojave stalnim ritmom. Svaka fotografija filma ima pridruženo točno određeno vrijeme tako da možemo nacrtati 2D graf funkcije u kojem na x os stavimo vremena, a na y os pripadni položaj promatrane točke na snimljenom tijelu.

2.2.2 Određivanje pomaka iz brzine

Promotrimo sada općenit slučaj kada se brzina mijenja tijekom gibanja. Da li i u ovom slučaju možemo na temelju potpune informacije o brzini odrediti pomak materijalne točke? Krenimo od izraza (2.1) i zamislimo da promatramo gibanje vrlo kratko vrijeme, dovoljno da brzinu možemo smatrati stalnom. Ovo se praktično uvijek može učiniti, npr ako promatramo sprintera pri trčanju s vremenskim razmacima stotinke sekunde jasno je da u tako kratkom vremenu gotovo da nema promjene brzine trkača već je trenutna brzina izvrsno predstavljena srednjom vrijednošću. Neka je u promatranom gibanju s Δt označeno takvo - dovoljno kratko vrijeme. U bilo kojem trenutku pomak tijekom vremena Δt je dan prema (2.1) s:

$$s(i) - s(i - 1) = v_s(i - 1)\Delta t$$

gdje indeks i označava trenutak $i = 2, 3, \dots, N$. Oznaka s ovdje stoji umjesto pomaka po bilo kojoj 1D putanji (može biti x os za pravac, ali i dio kružnice). Ukupni pomak od početnog položaja s_p do konačnog položaja s_k se može izračunati prema sljedećim



Slika 2.3: Određivanje pomaka iz poznate brzine tijekom općenitog 1D gibanja. Iz slike je vidljivo da smanjivanje intervala vremena Δt povećava broj pravokutnika za zadano početno i konačno vrijeme, a zbroj ploština pravokutnika se približava ploštini ispod grafa funkcije.

jednadžbama

$$\begin{aligned}
 s_k - s_p &= s(N) - s(1) = \\
 &= s(N) - s(N-1) + s(N-1) - s(N-2) + s(N-2) - \\
 &\dots - s(2) + s(2) - s(1) = \\
 &= v_s(N-1)\Delta t + v_s(N-2)\Delta t + \dots + v_s(1)\Delta t
 \end{aligned}$$

Ovdje smo iskoristili pogodan način da zapišemo nulu kao npr $0 = -s(2) + s(2)$ i tako za sve vremenske intervale. Najvažnije je uočiti da se u različitim vremenskim intervalima srednja brzina općenito mijenja, ali pri tome umnošci $v_s(i)\Delta t$ imaju jednostavnu interpretaciju u v-t dijagramu. Oni predstavljaju ploštine pravokutnika kao na slici 2.3 što uzevši u obzir mogućnost smanjivanja intervala vremena Δt omogućava sljedeći opći rezultat:

Teorem 2.2.1. Pomak tijekom općenitog 1D gibanja odgovara ploštini ispod grafa u v-t dijagramu.

Usput ovo je razmatranje koje je Newtona i Leibniza dovelo do otkrića integralnog računa i rješenja općenitog problema računanja ploštine zakrivljenih oblika. Nema ni-

šta posebno u oznakama koje koristimo u izračunu - ideja je ista za bilo koji problem određivanja ploštine: prekriti što vjernije nepoznatu ploštinu relativno malim oblicima poznate ploštine te ih zbrojiti. Korištenjem sve manjih oblika povećavamo točnost računa tražene ploštine.

2.2.3 Jednoliko ubrzano gibanje

Sljedeća vrsta gibanja, tehnički neznatno složenija od jednolikoga, je jednoliko ubrzano gibanje (JUG). Ovdje uvodimo još jednu veličinu koja zaokružuje skup fizičkih veličina potrebnih za opis 1D gibanja: ubrzanje ili akceleraciju. U jednoj od sljedećih lekcija ćemo uvesti Newtonove zakone gibanja koji pokazuju da je ubrzanje ključna poveznica kinematike i uzroka - sila koje djeluju na tijela.



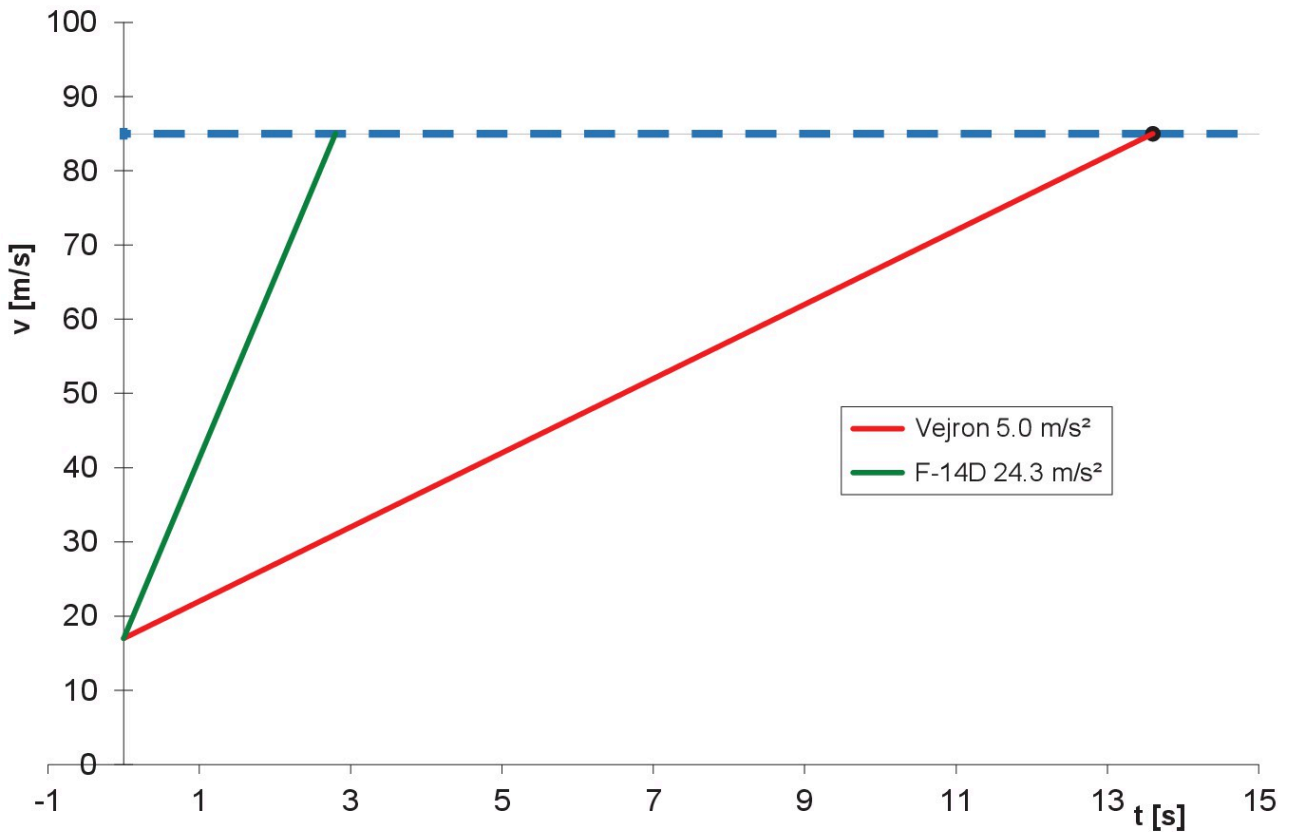
(a) F-14D Tomcat



(b) Bugatti Veyron

Slika 2.4: Jednoliko ubrzano gibanje: F-14D Tomcat (slika 2.4a) i 2010 Bugatti Veyron 16.4 Super Sport automobila (slika 2.4b).

Pogledajmo usporedbu ubrzanja F-14D Tomcat borbenog zrakoplova i 2010 Bugatti Veyron 16.4 Super Sport automobila slika 2.4. Pri katapultiranju F-14D brzina se mijenja od početnih 17 m/s do brzine polijetanja 85 m/s za 2.8 s. Veyron s druge strane istu promjenu brzine ostvari za 13.5 s (izvor: accelerationtimes.com). Obzirom da su konačna i početna brzina iste što razlikuje gibanje zrakoplova i automobila? Iz svakodnevnog iskustva odmah ćemo zaključiti: promjena brzine je ista, ali je vrijeme u kojem se promjena dogodila različito. Modelirajmo ovaj problem tako da i automobil i zrakoplov promatramo kao materijalne točke kojima se brzina jednoliko mijenja od početne



Slika 2.5: Jednoliko ubrzano gibanje: prikaz grafa brzine za gibanje 2010 Bugatti Veyron 16.4 Super Sport automobila i F-14D Tomcat borbenog zrakoplova pri ubrzanju od 17 do 85 m/s.

do konačne brzine. Prikažimo što predviđa ovakav model u v-t grafu koji je prikazan na slici 2.5. Kao mjeru promjene brzine u oba slučaja možemo uzeti omjer:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} \equiv \langle a \rangle \quad (2.2)$$

koji predstavlja novu fizičku veličinu *srednje ubrzanje*, a geometrijski na slici 2.5 predstavlja nagib pravca. Ova jednostavna definicija omogućava izračun u promatranim slučajevima:

$$\begin{aligned} \text{Veyron} \quad \frac{\Delta v}{\Delta t} &= \frac{68 \text{ m/s}}{13.5 \text{ s}} = 5.0 \text{ (m/s)/s} \\ \text{F-14D} \quad \frac{\Delta v}{\Delta t} &= \frac{68 \text{ m/s}}{2.8 \text{ s}} = 24 \text{ (m/s)/s} \end{aligned}$$

gdje smo dobili i odgovarajuću mjernu jedinicu $(\text{m/s})/\text{s}$ koja opisuje kako se brzina mijenja u odnosu na protok vremena. Na grafu veći nagib pravca odgovara većoj promjeni

brzine obzirom na zadano vrijeme promjene. Ako su u v-t dijagramu pravci nužno je riječ o JUG-u (horizontalni pravac predstavlja jednoliko gibanje, ubrzanje je nula u tom slučaju). Osnovna karakteristika JUG-a je da uvedeni pojam srednjeg ubrzanja daje isti rezultat bez obzira koliko je vrijeme promatranja promjene brzine. Ova činjenica se u daljnjem razvijanju mehanike koristi za analizu i složenijih gibanja koji odgovaraju drugim krivuljama na v-t dijagramu, a u osnovi je ideje diferencijalnog računa. U daljnjem razmatranju nastaviti ćemo razvijati kvantitativne relacije koje precizno opisuju odnose između ključnih fizičkih veličina i njihova prikaza na grafovima.

2.2.4 Jednoliko ubrzano gibanje i jednadžbe

Iz definicije *srednjeg ubrzanja* (2.2)

$$\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_k - v_p}{\Delta t}$$

lako je dobiti algebarskim pretvorbama:

$$v_k = v_p + \langle a \rangle \Delta t \quad (2.3)$$

što na v-t dijagramu predstavlja pravac koji kreće od brzine v_p i karakterizira ga nagib $\langle a \rangle$. Pomak tijekom JUG je ploština u v-t dijagramu kao što je općenito objašnjeno u odjeljku 2.2.2 i prikazano na slici 2.3 samo što u ovom slučaju imamo vrlo jednostavnu geometriju te su izračuni elementarni. Sa slike 2.6 je vrlo lako očitati izraz za pomak:

$$s_k - s_p = (t_k - t_p)v_p + \frac{1}{2}(t_k - t_p)a(t_k - t_p)$$

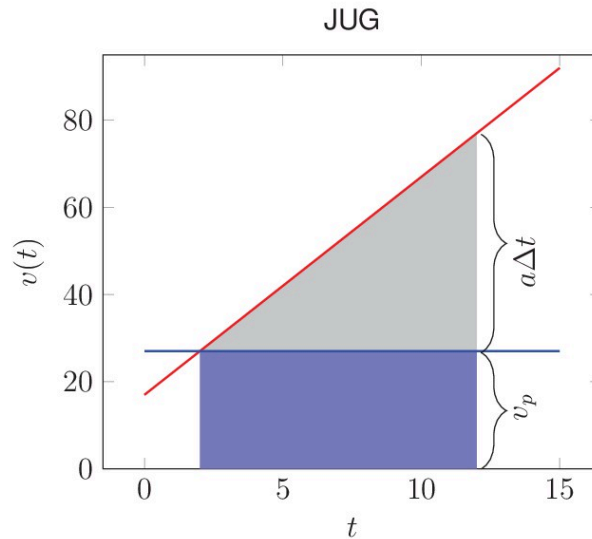
ili ukoliko zadamo kao što je uobičajeno $t_p = 0$ dobijemo:

$$s(t) = s_p + v_p t + \frac{1}{2}at^2 \quad (2.4)$$

što je važan izraz koji opisuje položaj kao matematičku funkciju polinoma drugog reda u vremenu. s može biti bilo koja koordinata 1D sustava. Kombiniranjem izraza (2.3) i (2.4) možemo povezati pomak i brzine pri JUG:

$$v_k^2 = v_p^2 + 2a(s_k - s_p) \quad (2.5)$$

koja je praktična u situacijama kada nas ne zanima vrijeme.



Slika 2.6: Grafičko određivanje pomaka materijalne točke kao ploštine ispod grafa v - t krivulje od $t_p = 2\text{ s}$ do $t_k = 12\text{ s}$. Vidljivo je da se ukupna ploština sastoji od pravokutnika i pravokutnog trokuta.

Primjer 2.4 (JUG). Zrakoplov pri slijetanju na nosač aviona ima brzinu 64 m/s . Odredite prosječno ubrzanje tijekom zaustavljanja koje traje 2.0 s . Koliki put prevali u tom vremenu?

Rješenje U ovom problemu ćemo 1D sustav postaviti u smjeru gibanja aviona po pisti nosača. Primijetite da, osim početne brzine, imamo zadanu i konačnu koja je 0 m/s jer se zrakoplov zaustavi prema opisu iz zadatka. Tako izravno možemo odrediti ubrzanje:

$$\langle a_x \rangle = \frac{v_{xk} - v_{xp}}{\Delta t} = \frac{0 - 64\text{ m/s}}{2.0\text{ s}} = -32\text{ m/s}^2$$

Korištenjem izraza za položaj u ovisnosti u vremenu pri JUG (2.4) konačni položaj (ujedno prijeđeni put) je:

$$\begin{aligned} x_k &= x_p + v_{xp} \Delta t + \frac{1}{2} \langle a_x \rangle (\Delta t)^2 \\ &= 0 + (64\text{ m/s})(2.0\text{ s}) + \frac{1}{2}(-32\text{ m/s}^2)(2.0\text{ s})^2 = (128\text{ m}) - (64\text{ m}) = 64\text{ m} \end{aligned}$$

Gibanje čestice samo uz djelovanje gravitacije, bez drugih sila, se naziva *slobodni pad*. U situacijama koje opažamo oko sebe takva se situacija ne sreće zbog prisutnosti

zraka. Na svu sreću pri padu tijela velike gustoće (stijene, metalni predmeti i sl.) često činimo vrlo malu pogrešku zanemarujući utjecaj zraka. Ova vrsta pojednostavljivanja uz brigu o ključnim uvjetima kada takvo zanemarivanje ne uvodi značajniju pogrešku je tipično za prirodnoznanstveno opisivanje pojava. Upravo je ova sposobnost kvantitativnog ocjenjivanja doprinosa preciznosti različitih utjecaja na opažanje razumijevanje prirode koje nazivamo *fizika*. Na YouTube poslužitelju moguće je² pogledati sjajnu demonstraciju rezultata Galilejevih otkrića. Naime fizičar Galileo di Vincenzo Bonaiuti de' Galilei u 17. stoljeću je prva osoba koja je na temelju kreativno osmišljenih eksperimenata, pažljive kvantitativne analize i bistrog zaključivanja otkrio suštinske zakonitosti *slobodnog pada*. Bio je to jedan od najvažnijih događaja za uspostavljanje znanstvene metode koja će postati temelj moderne prirodne znanosti³ u kojoj više nema autoriteta već se svi zaključci i tvrdnje o prirodi podvrgavaju eksperimentalnoj provjeri. Ovaj događaj je otvorio put nevjerojatnom slijedu otkrića i spoznaja koji su u temelju moderne civilizacije. Glavno opažanje Galilea je da se bez ometanja atmosfere sva tijela, neovisno o masi, gibaju istim ubrzanjem pri *slobodnom padu*. Za vrijednost gravitacijskoga ubrzanja uzimamo u računskim zadacima iznos

$$g = 9.80m/s^2$$

koji vrijedi samo na Zemlji i posljedica je isključivo gravitacijske sile. Važno je uočiti da g nije gravitacija jer ova fizička veličina nije sila već ubrzanje.

Sada možemo iskoristiti naše razumijevanje JUG-a i opisati slučaj kada se s određene visine ispusti tijelo te se prepusti gravitacijskoj sili. Postavimo 1D koordinatni sustav tako da okomicu na tlo označava y os (ovdje je naš opći $s y$). Uvrštavanje vrijednosti u jednadžbu (2.3) uz h kao početnu visinu te $a_y = -g$ dobijemo

$$\begin{aligned} v_y(t) &= v_p - gt \\ y(t) &= h + v_p t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned} \tag{2.6}$$

pri čemu početna brzina v_p može biti pozitivna (prema gore) ili negativna (prema dolje).

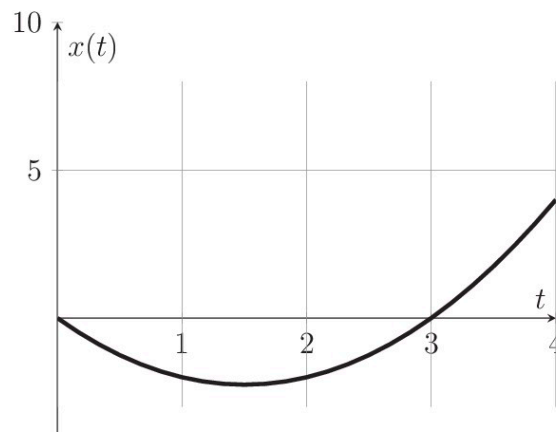
Primjer 2.5 (Općenito 1D gibanje). Čestica se giba duž x-osi prema jednadžbi $x(t) = -3t + t^2$ gdje je položaj dan u m , a vrijeme u s . Nacrtajte x-t dijagram te opišite gibanje čestice što preciznije. Skicirajte v-t dijagram.

²U vrijeme pisanja poveznica Galileo's Famous Gravity Experiment by Brian Cox. s isječkom iz dokumentarca BBC-a.

³U njegovo doba se to područje nazivalo filozofijom prirode. Od sredine 19. st. taj pojam označava fiziku, a na sveučilištu Oxford naslov koji se dobiva obranom doktorske disertacije iz fizike se i dalje zove "Doctor of Philosophy in Physics".

Odredite pomak i srednju brzinu u zadanim vremenskim intervalima $[0,1]$ i $[1,3]$ s!

Rješenje U ovom problemu najbolje je krenuti tako da se grafički prikaže matematička ovisnost: pomake računamo tako da uvrstimo vremena u zadanu funkciju položaja u



ovisnosti o vremenu $x(t)$ tako da se pomak od početnog do konačnog trenutka računa prema $\Delta x = x(t_k) - x(t_p)$. Sljedeća tablica sadrži tražene rezultate iz zadatka:

$[t_p, t_k]$ [s]	[0,1]	[1,3]
Δx [m]	-2	2
$\langle v_x \rangle$ [m/s]	-2	1

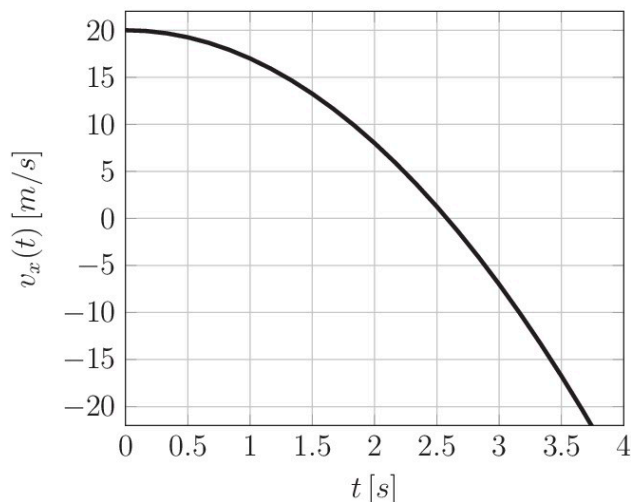
gdje smo s $\langle v_x \rangle$ označili srednju brzinu koja odgovara pomaku u prethodnom retku. ◀

Primjer 2.6 (Općenito 1D gibanje). Čestica se giba duž x osi tako da joj je brzina zadana s $v_x = (20 \text{ m/s}) - (3 \text{ m/s}^3)t^2$.

1. Odredite srednje ubrzanje u intervalu $[0,2]$ s!
2. Odredite ubrzanje u $t = 2.0$ s!

Rješenje U ovom problemu najbolje je krenuti tako da se grafički prikaže matematička ovisnost: srednje ubrzanje računamo prema standardnom izrazu u intervalu oko trenutka t $[t - \Delta t, t + \Delta t]$

$$\langle a_x \rangle = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{[20 - 3(t + \Delta t)^2] - [20 - 3(t - \Delta t)^2]}{2\Delta t} = \frac{-12t \Delta t}{2\Delta t} = -6t$$



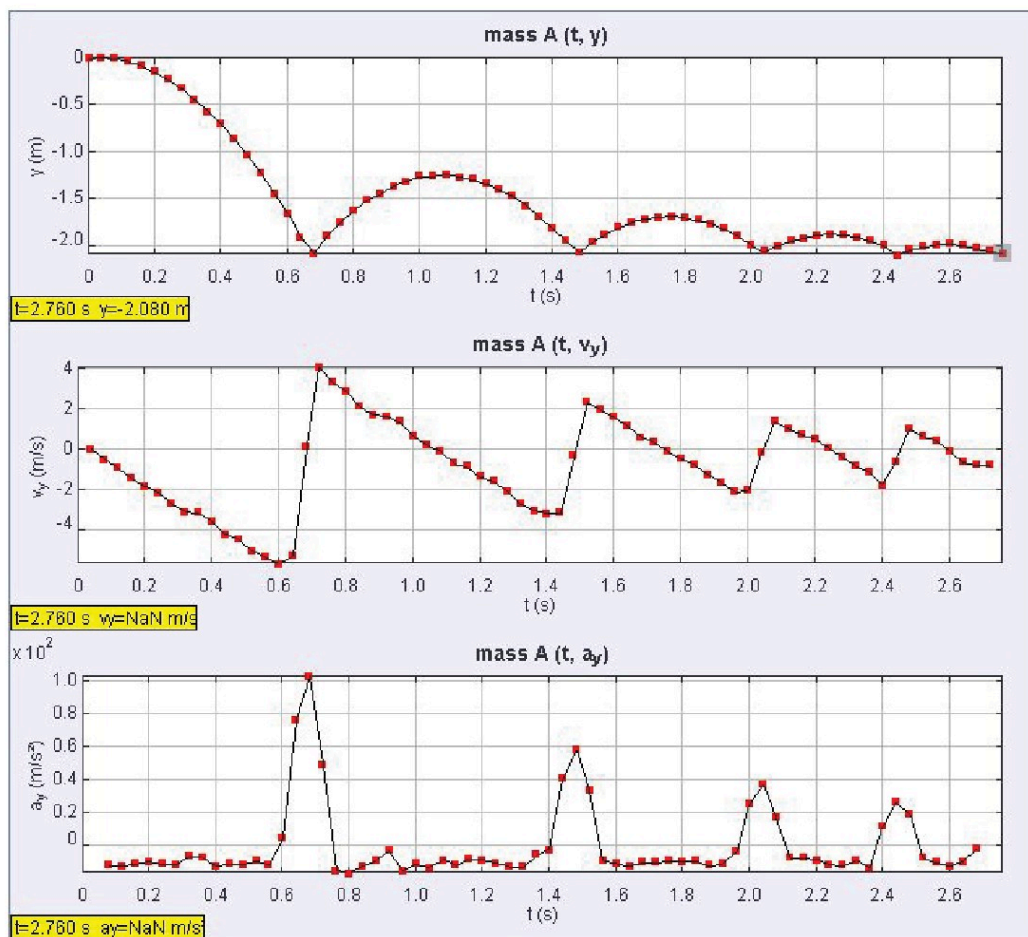
tako da za promjenu brzine koristimo zadani izraz. Srednje ubrzanje određeno u gornjem izrazu je egzaktno i ne ovisi o izboru Δt tako da je identično trenutnom. Ovo je osobitost kvadratnoj ovisnosti brzine o vremenu. U slučaju postojanja viših potencija dobila bi se dodatna ovisnost o Δt . Smanjenjem vremenskog intervala Δt povećava se preciznost izračuna ubrzanja jer se smanjuje doprinos zanemarenih članovi (vrlo mali doprinos potencija dovoljno mala vrijednost Δt).

1. prema prije određenom izrazu dobivamo konačno rješenje za srednje ubrzanje $\langle a_x \rangle (t = 1 s) = -6 (1 s) = -6 m/s^2$
2. trenutno ubrzanje možemo izračunati korištenjem odgovarajućeg izraza i u ovom slučaju iznosi $a_x(t = 2 s) = -12 m/s^2$.

Postupak određivanja trenutnog ubrzanja u ovom slučaju je posebna varijanta izračuna granične vrijednosti omjera dva izraza gdje, iako se i nazivnik i o njemu ovisan brojnik, smanjuju po apsolutnom iznosu vrijednost samog omjera ostaje konačna. ◀

Pogledajmo sada zanimljiv slučaj gibanja tenis loptice tijekom poskakivanja nakon ispuštanja s određene visine. Promatranje će biti kvalitativno, a unijet ćemo i nekoliko pojednostavljenja u odnosu na realnu situaciju koji ne utječu na najvažnije značajke gibanja. Kao prvo pretpostavit ćemo 1D gibanje (duž y-osi) te da se loptica odbija trenutno i pri tome "izgubi" nešto brzine po apsolutnoj vrijednosti. U stvarnosti se loptica deformira i pri tome dolazi do složenog procesa koji ćemo pobliže objasniti u budućim lekcijama gdje je konačni rezultat smanjenje iznosa brzine nakon odskoka. Slika 2.7

prikazuje $y - t$, $v_y - t$ i $a_y - t$ dijagram eksperimenta u kojem je loptica ispuštena s visine 2.0 m. Možemo uočiti da po intervalima od odskoka do ponovnog sraza s tlom



Slika 2.7: Visina, brzina i ubrzanje poskakujuće loptice u ovisnosti o vremenu. Analiza provedena s pomoću programskog alata Tracker [1] prema video snimci eksperimenta.

loptica izvodi vertikalni hitac opisan izrazima (2.6) gdje je h početna visina u intervalu do prvog sraza s tlom. U sljedećim intervalima $h = 0$. Loptica ima stalno ubrzanje $-g$ osim u trenutku sraza s podlogom. Tijekom svakog odskoka brzina se mijenja $-v_0$ u v_0 (zapravo nešto manje od v_0 po iznosu zbog gubitaka što se lijepo vidi na dijagramu $v_y - t$ u sredini na slici 2.7) tijekom vrlo kratkog intervala vremena. Ova nagla i velika po iznosu promjena je uzrokovana vrlo velikim ubrzanjem prema gore (razmislite $a_y = \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \frac{2v_0}{\Delta t}$ gdje je Δt vrlo mali iznos). Ova analiza objašnjava oštre vrhove u $a_y - t$ dijagramu.

Primjer 2.7 (Vertikalni hitac). Kamen je bačen s vrha zgrade praktično okomito početnom brzinom 20.0 m/s vertikalno uvis. Zgrada je visoka 50.0 m, a kamen pri padu prođe tik uz rub zgrade i nastavlja padati prema tlu. Uzmimo da je početni tren $t=0$ odredite:

1. vrijeme za koje kamen dosegne najvišu točku;
2. maksimalnu visinu;
3. vrijeme potrebno da se nakon bacanja kamen vrati na početnu visinu;
4. brzinu u tom trenutku;
5. brzinu i položaj u $t = 5.00$ s;

Rješenje U ovom problemu najpogodnije jednačbe su (2.6) jer se rješenje svodi na sistematsku primjenu ova dva rezultata. Način na koji je problem postavljen (vidi sliku 2.8) omogućava korištenje pojednostavljenja na 1D gibanje tako da ćemo za početak odrediti i označiti karakteristične točke tijekom gibanja. Početni položaj neka je ishodište 1D sustava.

1. najvišu točku karakterizira brzina iznosa nula tako da izravnim uvrštavanjem dobivamo:

$$t_B = \frac{v_p}{g} = \frac{20.0 \text{ m/s}}{9.8 \text{ m/s}^2} = 2.04 \text{ s}$$

2. maksimalnu visinu dobijemo uvrštavanjem gore dobivena vremena u jednačbu za položaj:

$$h_{max} = y_B = 0 + v_p t - \frac{1}{2} g t^2 = 20.4 \text{ m}$$

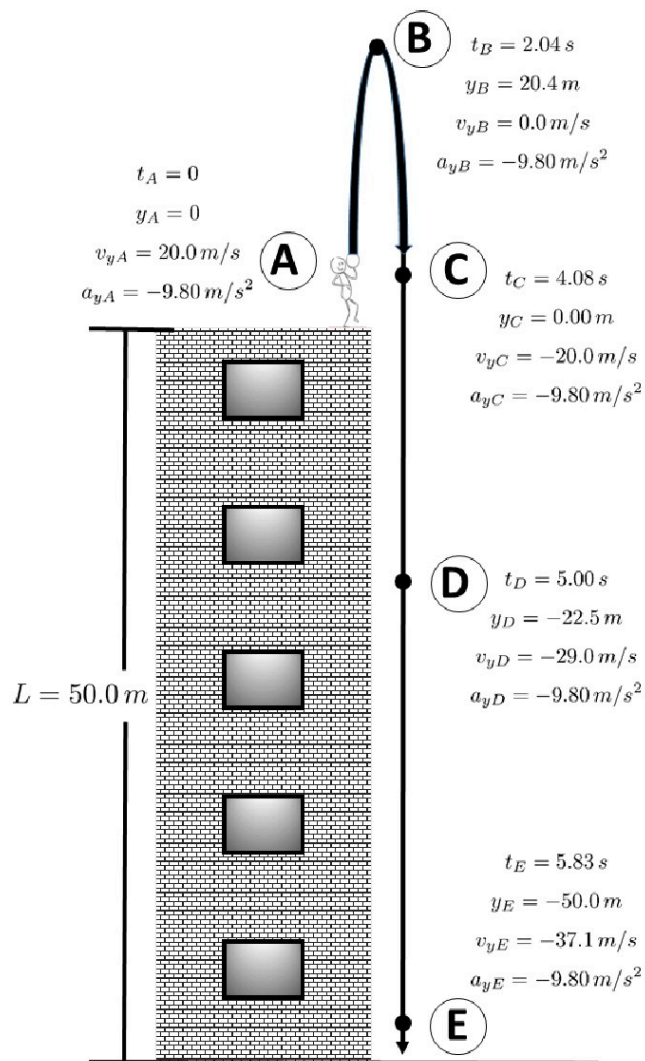
3. vrijeme potrebno da se nakon bacanja vrati na početnu visinu je jednostavno dvostruko vrijeme iz prethodnog dijela zadatka 4.08 s;
4. brzina u tom trenutku je

$$v_y(4.08 \text{ s}) = (20.0 \text{ m/s}) - g(4.08 \text{ s}) = -20.0 \text{ m/s}$$

5. brzina i položaj u $t = 5.00$ s je

$$v_{yD} = v_y(5.00 \text{ s}) = (20.0 \text{ m/s}) - g(5.00 \text{ s}) = -29.0 \text{ m/s}$$

$$y_D = y(5.00 \text{ s}) = 0 + (20.0 \text{ m/s})(5.00 \text{ s}) - \frac{1}{2} g(5.00 \text{ s})^2 = -22.5 \text{ m}$$



Slika 2.8: Položaj i brzina kamena bačena vertikalno u vis početnom brzinom 20.0 m/s .

Rezultate i grafički prikaz u ovom problemu je prikazan na slici 2.8 (dodani su podaci i za trenutak kada kamen padne na tlo - točka E). ◀

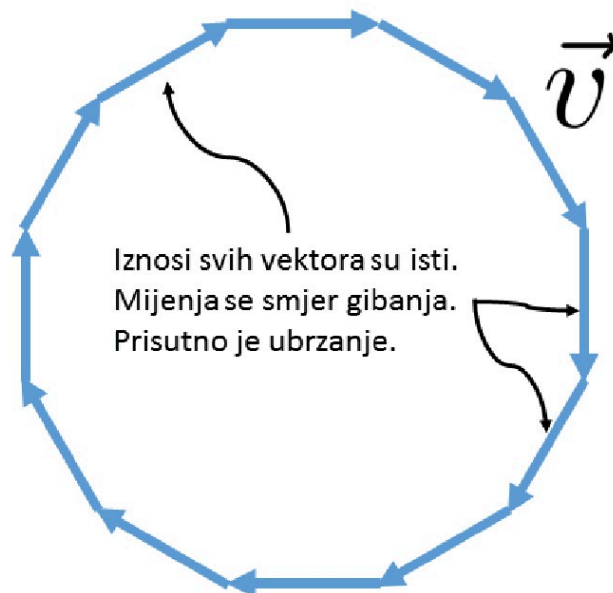
2.3 Kinematika 2D

2.3.1 Ubrzanje

1D definicija ubrzanja se prirodno može proširiti i na više dimenzija pa za srednju vrijednost možemo uzeti:

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (2.7)$$

Novost koju donosi više dimenzija je mogućnost postojanja ubrzanja, a da se pri tom iznos brzine ne mijenja kao što prikazuje primjer na slici 2.9. Iz definicije (2.7) jasno je



Slika 2.9: Slika prikazuje hipotetsko 2D gibanje pri kojem je iznos brzine stalan, ali se smjer mijenja tako da se dobiva kružno gibanje u smjeru kazaljke na satu.

da je smjer ubrzanja zadan smjerom promjene brzine $\Delta \vec{v}$.

Da bismo opisali višedimenzionalno gibanje potrebno je precizno opisivati pomak čestice (odabrane točke tijela) koju promatramo. Sljedeća dva primjera ilustriraju osnovne tehnike sa stanovišta algebre vektora.

Primjer 2.8 (2D kretanje). Automobil putuje 20.0 km sjeverno, a zatim promjeni smjer gibanja za 60° gibanja prema zapadu. Novim smjerom nastavlja vožnju 35.0 km. Postavite koordinatni sustav i u njemu odredite konačni položaj automobila.

Rješenje Ovaj problem možemo postaviti tako da formiramo trokut s vektorima \vec{A} i \vec{B} koji su u koordinatama reprezentirani s relacijama:

$$\vec{A} = (20.0 \text{ km})\hat{y} \quad \vec{B} = (35.0 \text{ km}) \cos(150^\circ) \hat{x} + (35.0 \text{ km}) \sin(150^\circ) \hat{y}$$

Rezultantni vektor pomaka je dan s vektorskim zbrojem ova dva pomaka:

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = (0.0 - 30.3 \text{ km}) \hat{x} + (20.0 + 17.5 \text{ km}) \hat{y} = -(30.3 \text{ km}) \hat{x} + (37.5 \text{ km}) \hat{y}$$

Ukupni pomak je dan s duljinom vektora \vec{R} koji iznosi

$$|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{30.3^2 + 37.5^2} = 48.2 \text{ km}$$

Kut koji vektor zatvara s x osi je dan s

$$\beta + 90^\circ = \arctan\left(\frac{R_y}{R_x}\right) = \arctan\left(-\frac{37.5}{30.3}\right) = 129^\circ$$

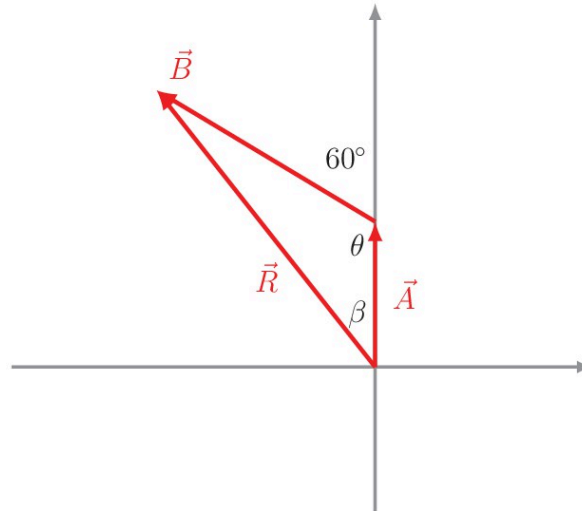
Ovdje je važno primijetiti da nam \arctan funkcija na kalkulatoru obično daje rezultat u rasponu $[-90^\circ, 90^\circ]$ pa se treba dodatno transformirati prema skici problema. Problem smo mogli riješiti i korištenjem standardnih relacija za trokut, naime izravnom primjenom poučka o kosinusu (uz oznake kao na slici 2.10) dobivamo:

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta} = \sqrt{(20.0 \text{ km})^2 + (35.0 \text{ km})^2 - 2(20.0 \text{ km})(35.0 \text{ km}) \cos(180^\circ - 60^\circ)} = 48.2 \text{ km}$$

dakle identičan rezultat kao i pri primjeni koordinatne metode. Smjer vektora \vec{R} možemo dobiti primjenom poučka o sinusu kutova u trokutu što nam daje:

$$\frac{\beta}{B} = \frac{\theta}{R} \Rightarrow \sin \beta = \frac{35.0 \text{ km}}{48.2 \text{ km}} \sin(120^\circ) = 0.629$$

tako da je konačno $\beta = 39.0^\circ$ kao i u prethodnom postupku. ◀



Slika 2.10: Kretanje vozila sjever pa sjeverozapad.

Primjer 2.9 (2D kretanje). Brod na redovitoj ruti kreće iz polazišta u luku 1 koja se nalazi 150 km 30° sjeverno od smjera istoka, a zatim krene u luku 2 udaljenu 160 km u smjeru 20° zapadno od sjevera. Posljednja etapa je 3, 175 km zapadno od luke 2. Odredite položaj odredišta luke 3 prema polazištu broda (vidi slika 2.11).

Rješenje U ovom problemu pristup je identičan kao i u slučaju zadatka 2.8 uz dodatnu napomenu da bi sada pristup korištenjem ravninske geometrije za opći trokut (poučci sinusa i kosinusa) bio vrlo nezgrapnan (zbrajamo tri vektora umjesto dva) tako da slijedimo elegantni pristup koordinatne metode gdje tri etape plovidbe označavamo s $\vec{r}_{1,2,3}$:

$$(r_1)_x = a \cos(30.0^\circ) = (150 \text{ km})(0.866) = 129.9 \text{ km}$$

$$(r_1)_y = a \sin(30.0^\circ) = (150 \text{ km})(0.500) = 75.0 \text{ km}$$

te na isti način za vektor \vec{r}_2 :

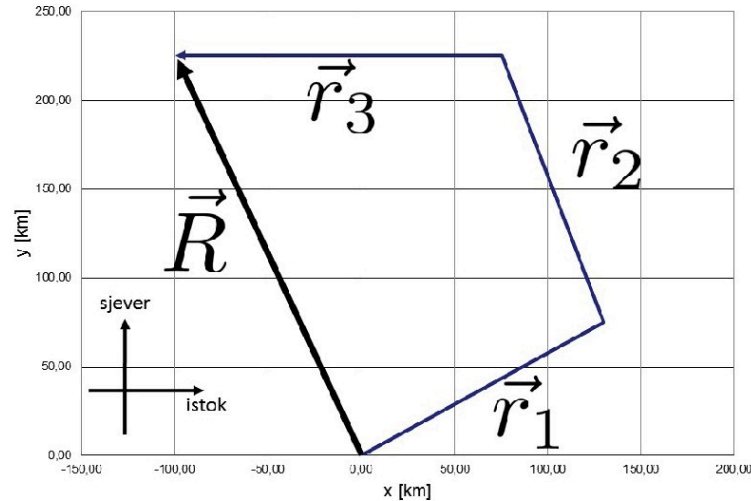
$$(r_2)_x = b \cos(110^\circ) = (160 \text{ km})(-0.342) = -54.72 \text{ km}$$

$$(r_2)_y = b \sin(110^\circ) = (160 \text{ km})(0.940) = 150.35 \text{ km}$$

i konačno za vektor \vec{r}_3 :

$$(r_3)_x = c \cos(180^\circ) = (175 \text{ km})(-1.0) = -175 \text{ km}$$

$$(r_3)_y = c \sin(180^\circ) = (175 \text{ km})(0.000) = 0 \text{ km}$$



Slika 2.11: Grafički prikaz putanje broda tijekom plovidbe prema podacima iz zadatka 2.9.

Prema tome koristeći se standardnim izrazom za zbrajanje vektora u koordinatnom prikazu dobivamo:

$$R_x = (r_1)_x + (r_2)_x + (r_3)_x = (129.9 \text{ km}) + (-54.72 \text{ km}) + (-175 \text{ km}) = -99.82 \text{ km}$$

$$R_y = (r_1)_y + (r_2)_y + (r_3)_y = (75.0 \text{ km}) + (150.35 \text{ km}) + (0 \text{ km}) = 225.35 \text{ km}$$

ili u vektorskom prikazu s pomoću jediničnih vektora i s korektnim brojem značajnih decimalnih znamenki:

$$\vec{R} = (-100 \text{ km})\hat{x} + (225 \text{ km})\hat{y}$$

Možemo još izračunati da je polazište i konačno odredište udaljeno 246.5 km i u smjeru 24° zapadno od sjevera. Kompletna ruta je prikazana na slici 2.11. ◀

Primjer 2.10 (2D opće gibanje). Čestica počinje gibanje u $t = 0 \text{ s}$ s početnom brzinom 25 m/s u x smjeru i -16 m/s u y smjeru. Čestica se giba u xy ravnini ubrzanjem $a_x = 2.0 \text{ m/s}^2$. Odredite:

1. vektor brzine za bilo koji trenutak;
2. vektor brzine u $t = 4.0 \text{ s}$ (komponente i ukupno);
3. vektor položaja za bilo koji trenutak;

4. vektor položaja u $t = 4.0$ s (komponente i ukupno);

Rješenje Obzirom da je akceleracija konstanta ovaj problem kategoriziramo kao 2D gibanje stalnim ubrzanjem, dakle JUG. Za početak postavljamo početne uvjete tako da je početna brzina u x smjeru $v_{xp} = 25 \text{ m/s}$, y smjeru $v_{yp} = -16 \text{ m/s}$ te analogno za ubrzanje $a_x = 2.0 \text{ m/s}^2$ i $a_y = 0 \text{ m/s}^2$. Izrazi za brzinu pri JUG u ovom slučaju imaju sljedeći oblik:

1.

$$\begin{aligned}v_{xk} &= v_{xp} + a_x t = (25 \text{ m/s}) + (2.0 \text{ m/s}^2)t \\v_{yk} &= v_{yp} + a_y t = (-16 \text{ m/s}) + 0.0 t\end{aligned}$$

ili vektorski

$$\vec{v}(t) = v_{xk}\hat{x} + v_{yk}\hat{y} = [(25 \text{ m/s}) + (2.0 \text{ m/s}^2)t]\hat{x} + (-16 \text{ m/s})\hat{y}$$

2.

$$\vec{v}(4.0 \text{ s}) = [(25 + 2.0 \cdot 4.0) \text{ m/s}]\hat{x} + (-16 \text{ m/s})\hat{y} = (33 \text{ m/s})\hat{x} - (16 \text{ m/s})\hat{y}$$

uz ovaj rezultat možemo odrediti ukupni iznos brzine

$$v(4.0 \text{ s}) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(33 \text{ m/s})^2 + (-16 \text{ m/s})^2} = 37 \text{ m/s}$$

dok je kut s x osi koordinatnog sustava u zadanom trenutku:

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = -\frac{16}{33} \Rightarrow \theta = -26^\circ$$

3. kako je početni položaj ishodište za koordinate imamo:

$$\begin{aligned}x(t) &= v_{xp}t + \frac{1}{2}a_x t^2 = (25 \text{ m/s})t + (1.0 \text{ m/s}^2)t^2 \\y(t) &= v_{yp}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = (-16 \text{ m/s})t\end{aligned}$$

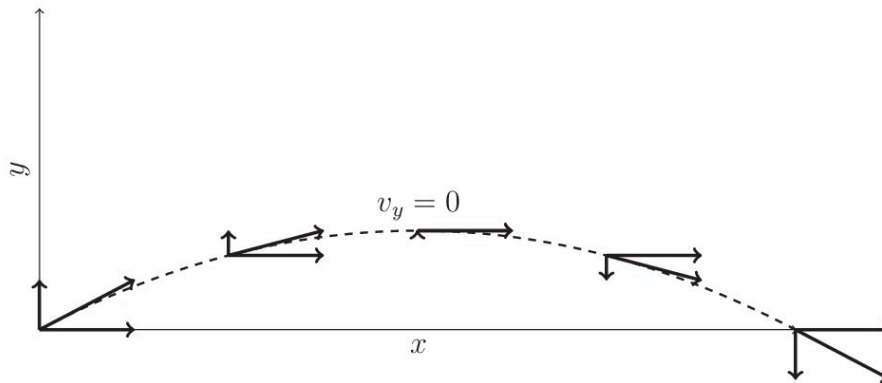
ili u vektorskom obliku

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} = [(25 \text{ m/s})t + (1.0 \text{ m/s}^2)t^2]\hat{x} + [(-16 \text{ m/s})t]\hat{y}$$

4. prethodni rezultat za $t = 4.0$ s daje

$$\vec{r}(4.0 \text{ s}) = [(25 \cdot 4.0 + 1.0 \cdot 4.0^2) \text{ m}]\hat{x} + [(-16 \cdot 4.0) \text{ m}]\hat{y} = (116 \text{ m})\hat{x} - (64 \text{ m})\hat{y}$$





Slika 2.12: Opis kinematike gibanja projektila.

2.3.2 Kosi hitac

Jedan od klasičnih problema gibanja koji spada u kategoriju JUG je i kosi hitac. Promatra se gibanje projektila ispaljenog zadanim iznosom početne brzine i kuta prema horizontalnoj ravnoj površini uz zanemarivanje utjecaja atmosfere i zakrivljenosti Zemlje na gibanje. Ovaj problem možemo modelirati kao 2D gibanje sljedećim izrazima za brzine i položaj:

$$\begin{aligned}
 v_x &= v_p \cos(\theta) \\
 v_y &= v_p \sin(\theta) - gt \\
 x(t) &= v_p \cos(\theta) t \\
 y(t) &= v_p \sin(\theta) t - \frac{1}{2}gt^2
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

gdje je θ kut koji vektor početne brzine zatvara prema horizontalnoj ravnini, a v_p je iznos vektora početne brzine.

Primjer 2.11 (Horizontalni hitac). Lopta je bačena horizontalno s klifa brzinom 8.0 m/s. Pretpostavite da nema utjecaja otpora zraka.

1. Odredite brzinu i
2. smjer gibanja nakon 2.0 s.

Rješenje Primjenom izraza (2.8) uz $\theta = 0$ dobivamo sljedeći rezultat:



Slika 2.13: Mike Powell, svjetski rekorder u skoku u dalj **8.95 m**, Tokyo 31. kolovoz 1991.god.! C. Lewis je u natjecanju skočio: 8.83 m (uz nedozvoljeni vjetar), 8.91 m (uz nedozvoljeni vjetar), 8.87 m (ok vjetar) i 8.84 m (ok vjetar). Ovakav dan za skok u dalj se do sada nije ponovio, zapravo nitko nakon tog dana nije uspio skočiti ni blizu ovim daljinama.

1. u vektorskom obliku $\vec{v}(t) = v_p \hat{x} - (gt) \hat{y}$

$$v_x = v_p$$

$$v_y = -gt$$

2. Nakon dvije sekunde $\vec{v}(2.0\text{ s}) = (8.0\text{ m/s})\hat{x} - (9.8\text{ m/s}^2)(2.0\text{ s})\hat{y}$ odnosno konačno $\vec{v}(2.0\text{ s}) = (8.0\text{ m/s})\hat{x} - (19.6\text{ m/s})\hat{y}$. Smjer gibanja je dan kutom s horizontalnom ravninom

$$\tan(\theta) = -\frac{19.6}{8.0} \Rightarrow \theta = -68^\circ$$

Primjer 2.12 (Skok u dalj). Skakač u dalj se odražava brzinom iznosa 11.5 m/s pod kutom $\theta = 19.0^\circ$. Vidi sliku 2.13.

1. Odredite duljinu skoka (horizontalni domet), ako možemo njegovo gibanje promatrati kao gibanje čestice.
2. Odredite i maksimalnu visinu leta u tom slučaju.

Rješenje Ovdje ćemo provest krajnje pojednostavljenje u kojem ćemo skakača promatrati kao materijalnu točku koja se giba kao projektil. Ishodište 2D sustava postavljamo na mjesto odraza pri skoku. Dvije karakteristične točke ovog gibanja koje razmatramo ćemo označiti kao V - maksimalna visina tijekom skoka i D - doskok. Skok skakača modeliramo kao ispucavanje kuglice u vakuumu zadanim početnim vektorom brzine. Maksimalna visina je određena uvjetom da je $v_y = 0$:

$$0 = v_y = v_p \sin(\theta_p) - gt_V = (11.5 \text{ m/s})(\sin 19.0^\circ) - (9.80 \text{ m/s}^2)t_V$$

što predstavlja linearnu jednadžbu s jednom nepoznanicom. Rješenje je $t_V = 0.382 \text{ s}$, a kako je gibanje pi kosom hicom (parabola) simetrično oko maksimuma visine možemo izravno izračunati $t_D = 2t_V = 0.764 \text{ s}$.

1. s t_D označimo vrijeme od odraza do doskoka uz takve oznake duljina skoka je

$$x_D = (v_p \cos(\theta_p))t_D = (11.5 \text{ m/s})(\cos 19.0^\circ)t_D$$

Uvrštavanjem ovog rezultata dobivamo i duljinu skoka

$$x_D = (11.5 \text{ m/s})(\cos 19.0^\circ)(0.764 \text{ s}) = 8.31 \text{ m}$$

2. Maksimalna visina je dana s y koordinatom u trenu t_V

$$y_{max} = y_V = v_p \sin(\theta_p)t_V - \frac{1}{2}gt_V^2 =$$

$$(11.5 \text{ m/s})(\sin 19.0^\circ)(0.382 \text{ s}) - \frac{1}{2}(9.80 \text{ m/s}^2)(0.382 \text{ s})^2 = 0.715 \text{ m}$$

Vidimo da bez obzira na drastično pojednostavljenje u modelu skoka u dalj dobili smo rezultate konzistentne s realnim skokom. Pokušajte mijenjati kut odraza i uvjerite se kako se duljina skoka znatno mijenja ukoliko se "pogriješi" za koji stupanj.

Razmislite zbog čega je kut odraza više nego dvostruko manji od optimalnih 45° . ◀

2.3.3 Inercijalni sustavi

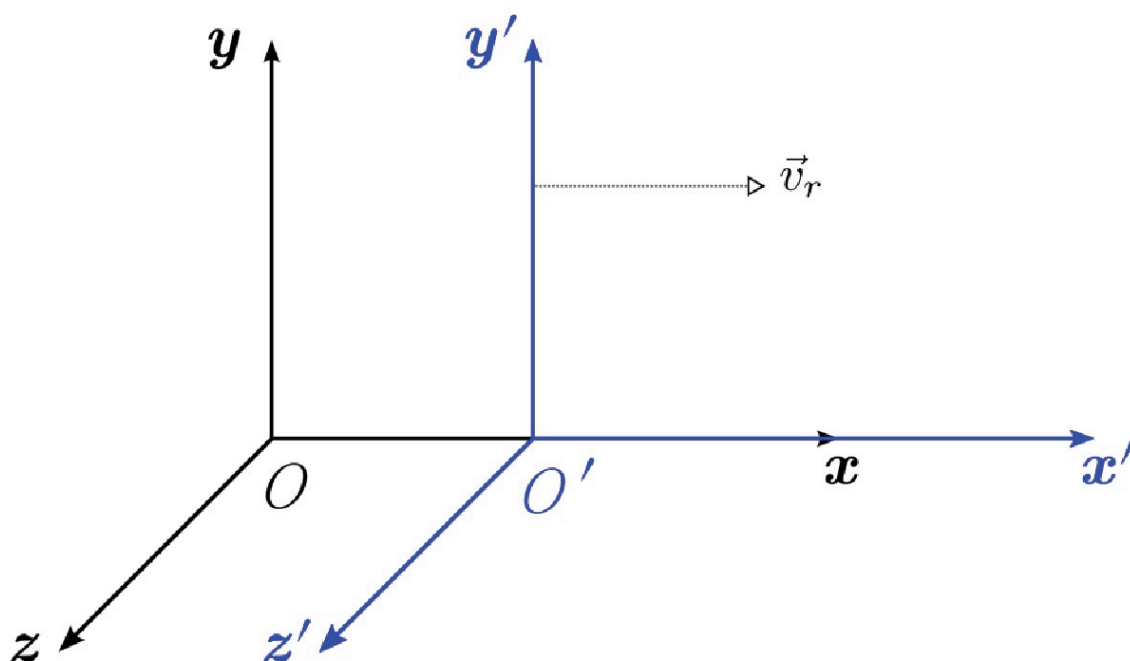
Svaki problem pri kvantitativnom opisu zahtjeva definiranje opažača, a uz njega i koordinatni sustav promatranja. Uzmimo primjer gibanje osobe koja hoda u vlaku koji se

prema zemlji kreće. Ukoliko promatrač sjedi u vlaku brzina osobe koja hoda će biti različita od one koju će opaziti promatrač koji stoji pored vlaka koji se giba. Kažemo da oni istu pojavu gledaju iz različitih inercijalnih sustava. Fundamentalne relacije koje povezuju kinematiku gledano iz dva inercijalna sustava koji se gibaju relativnom brzinom \vec{v}_r glase:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_r \quad (2.9a)$$

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}_r t \quad (2.9b)$$

Dakle nepomična točka u referentnom sustavu S' se giba prema jednadžbi (2.9b)! Uz



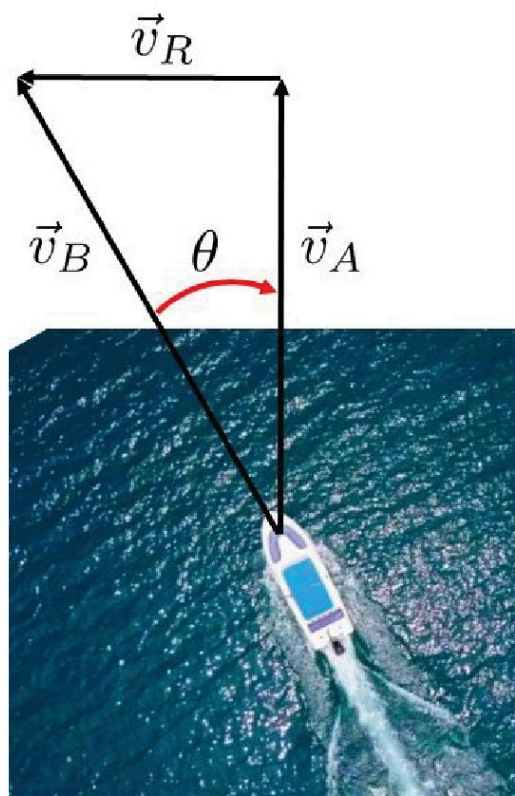
Slika 2.14: Inercijalni sustav S' se giba brzinom \vec{v} prema referentnom sustavu S . Važno je naglasiti da se rezultati fizičkoga opisa promatrano iz bilo kojeg sustava moraju slagati.

to relacija (2.9a) nam daje veoma važno pravilo za zbrajanje brzina ovisno o tome koji opažatelj mjeri brzinu. Inercijalni sustavi će biti posebno važni kada uvedemo Newtonove zakone koji vrijede upravo u inercijalnim sustavima i to svim. Rezultate koje dobijemo opisom gibanja u jednom sustavu moraju biti povezani s rezultatima u drugom sustavu jednadžbama (2.9a) i (2.9b).

Primjer 2.13 (Relativno gibanje). Brod plovi brzinom 12.5 km/h prema vodi u smjeru

sjevera preko široke rijeke koja teče jednolikom brzinom 4.00 km/h u smjeru zapad - istok. Odredite:

1. brzinu broda koju opaža promatrač koji stoji na obali;
2. u kojem smjeru brod treba ploviti po rijeci da bi se za opažača na obali kretao točno u smjeru sjevera;



Slika 2.15: Da bi plovio okomito na tok rijeke kormilar broda treba usmjeriti kormilo pod određenim kutom θ uzvodno.

Rješenje Prvi dio zadatka je situacija u kojoj kormilar usmjeri brod prema sjeveru, a to je smjer u kojem bi brod i plovio da voda miruje prema tlu. Zbog gibanja rijeke \vec{v}_R i broda prema vodi \vec{v}'_B ukupna brzina \vec{v}_B koju mjeri opažač koji gleda s obale je vektorski zbroj u skladu s pravilom o zbrajanju brzina pri prelasku iz jednog u drugi inercijalni sustav:

$$\vec{v}_B = \vec{v}'_B + \vec{v}_R$$

dakle gledano iz polarnog sustav:

$$v_B = \sqrt{(v'_B)^2 + (v_R)^2} = \sqrt{(12.5 \text{ km/h})^2 + (4.00 \text{ km/h})^2} = 13.1 \text{ km/h}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{v_R}{v'_B} = \frac{4.00}{12.50} = 17.7^\circ$$

U drugom problemu zadajemo referentni sustav vezan uz tlo i u njemu želimo da brzina broda odnosno vektor brzine ima smjer točno prema sjeveru. Obzirom da brod plovi okomito na tok rijeke možemo zaključiti da je vektor brzine broda prema vodi \vec{v}_B pod kutom θ koji je podešen na način da je komponenta brzine u smjeru toka istog iznosa i suprotnog smjera od vektora toka rijeke \vec{v}_R . Iz toga slijedi da je vektorski zbroj brzina rijeke i broda upravo brzina kojom brod prema tlu plovi na suprotnu stranu⁴. Iznos te brzine je prema Pitagorinom poučku:

$$v_A = \sqrt{v_B^2 - v_R^2} = \sqrt{(12.5 \text{ km/h})^2 - (4.00 \text{ km/h})^2} = 11.8 \text{ km/h}$$

smjer kojim treba usmjeriti brod prema vodi slijedi iz jednostavne primjene trigonometrije:

$$\theta = \arctan \frac{v_R}{v_A} = \arctan\left(\frac{5.00}{11.3}\right) = 18.7^\circ$$

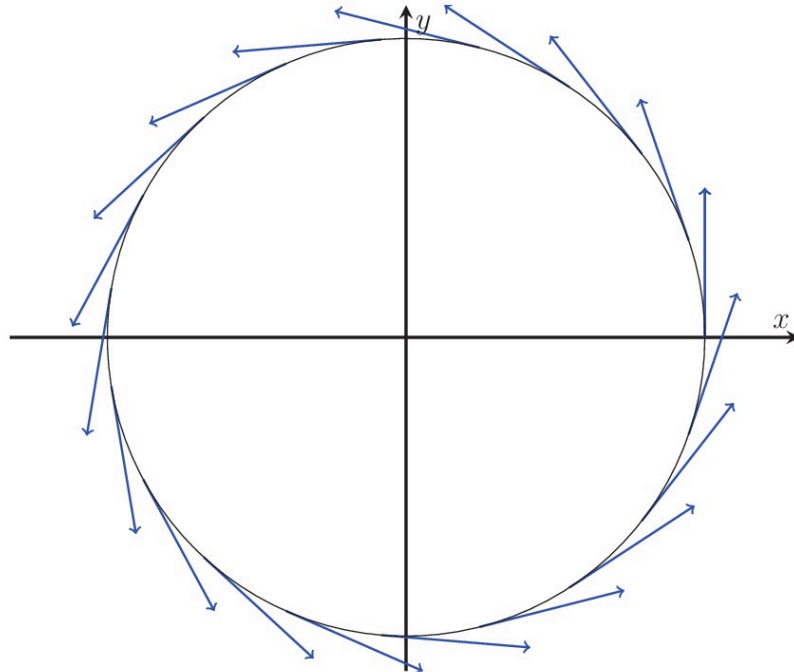


Vidimo da pri 2D gibanju možemo imati različite scenarije promjene brzine: promjena iznosa, promjena smjera i obje istodobno. Jedan od praktično važnih primjera je gibanje po kružnici brzinom stalnog iznosa: *jednoliko kružno gibanje*. Vektor brzine je prikazan na slici 2.16 i osim karakteristike da se duljina vektora ne mijenja tijekom gibanja smjer mu je uvijek tangenta na kružnicu. Vrijeme potrebno za jedan krug T se naziva period gibanja i povezan je s iznosom brzine na sljedeći način:

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

Pored predstavljanja gibanja u 2D Cartesiusovu sustavu moguće je, a ponekada je i prikladnije, koristiti polarni prikaz kao na slici 2.17 pomoću kuta θ kojeg vektor položaja ostvaruje prema x-osi. Predznak kuta se obično definira na način da je pozitivan kada

⁴Gledano iz referentnog sustava vezanog za tlo brod se ne kreće u smjeru toka rijeke.



Slika 2.16: Vektor brzine tijekom jednolikoga kružnog gibanja (vektori, tangencijalni na kružnicu).

se pomičemo suprotno kazaljka na satu i obratno. Npr. to znači da vektor položaja $\pi/6$ radijana ispod x-osi možemo označiti s $\theta = -\pi/6$ ili ekvivalentno $\theta = 2\pi - \pi/6 = 11\pi/6$. Ovdje napominjemo da je u znanosti i inženjerstvu uobičajeno kut mjeriti u radijanima (ujedno SI mjera za kut). Podsjetimo se na definiciju kuta u radijanima - dan je omjerom duljine pripadnoga luka s i polumjera kružnice r :

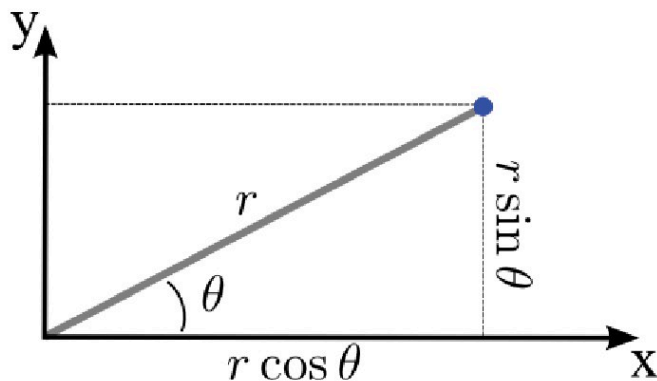
$$\theta [\text{rad}] \equiv \frac{s}{r} \quad (2.10)$$

Uz ovu definiciju kut 360° odgovara omjeru opsega i polumjera kružnice, a to iznosi ($2\pi r/r = 2\pi$). Ovo nas upućuje na jednostavnu pretvorbu stupnjeva u radijane

$$(\text{kut rad}) = (\text{kut stupnjevi}) \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}$$

pa tako možemo dobiti da je $1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \simeq 57.3^\circ$. Jedna od vrlo važnih relacija kod gibanja po kružnoj putanji se dobiva iz definicije kuta u radijanima (naravno vrijedi samo ukoliko kutove mjerimo u radijanima) za duljinu luka glasi:

$$s = r \theta \quad (2.11)$$



Slika 2.17: Polarni koordinatni sustav.

Kada su u pitanju mjerne jedinice za kut pogled na (2.10) otkriva jednu važnu značajku, a ta je da *rad* nije poput kilograma za koji imamo standard. Matematički izraz predstavlja *definiciju*, a upućuje da je kut samo broj, dakle bezdimenzionalna veličina⁵. Kako bismo onda trebali gledati na stupnjeve ili radijane? Precizno je u ovim jedinicama vidjeti informaciju na što se ovdje odnosi obični realni broj. Na neki način ove jedinice su podsjetnik na značenje broja i ono što ponekada može biti zbunjujuće je činjenica da se u matematičkim izrazima *rad* zna javljati i bezrazložno gubiti. Dobra praksa je ići s algebarskim izrazima do kraja prije konačnog uvrštavanja konkretnih vrijednosti fizičkih veličina. U tom slučaju se relativno lako odredi pitanje kuta pogledom na prethodni korak u izračunu.

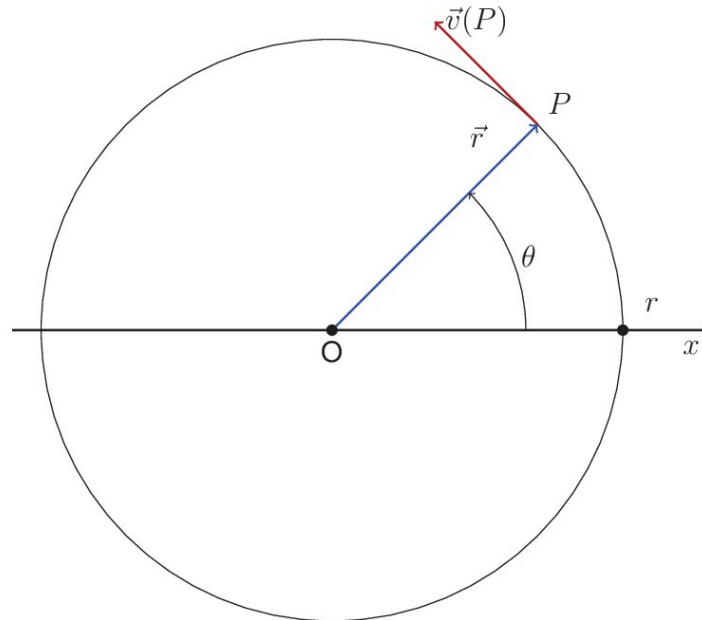
2.3.4 Kutna brzina

Prikaz gibanja po kružnici u polarnom sustavu upućuje na zanimljivu mogućnost definiranja nove veličine koja bi opisivala kut prebrisan u jedinici vremena, *srednja kutna brzina*:

$$\langle \omega \rangle = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Ova jednadžba je istovjetna definiciji brzine koju smo uveli u okviru 1D gibanja te je analogno moguće definirati i trenutnu *kutnu brzinu* graničnim postupkom smanjenja protekloga vremena $\Delta t \rightarrow 0$. *Jednoliko gibanje po kružnici* karakterizira nepromje-

⁵Kut u radijanima je omjer dvije veličine koje imaju dimenziju duljine pa uz standardno shvaćanje predstavlja *bezdimenzionalnu* veličinu.



Slika 2.18: Standardni prikaz gibanja po kružnici s prikazom vektora brzine i osnovne značajke - brzina ima smjer tangente na kružnicu.

njivost kutne brzine u bilo kojem vremenskom intervalu, a to je analogno jednolikom 1D gibanju po pravcu. Obzirom da je matematička jednadžba ista vrijede i analogni rezultati:

1. kut prebrisan tijekom gibanja po kružnici odgovara površini ispod $t - \omega$ grafa
2. predznak kutne brzine može biti i pozitivan i negativan ovisno konvenciji smjera vrtnje
3. $\theta(t) = \theta_0 + \omega t$

Slika 2.18 prikazuje osnovne značajke gibanja po kružnici i prikladne fizičkih veličina za kinematički opis. Položaj materijalne točke čije gibanje promatramo opisuje vektor položaja \vec{r} koji se pri kružnom gibanju vrti oko ishodišta. Jednostavno je pokazati prema (2.11) da vrijedi:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{r \Delta \theta}{\Delta t} = r \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = r\omega \quad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (2.12)$$

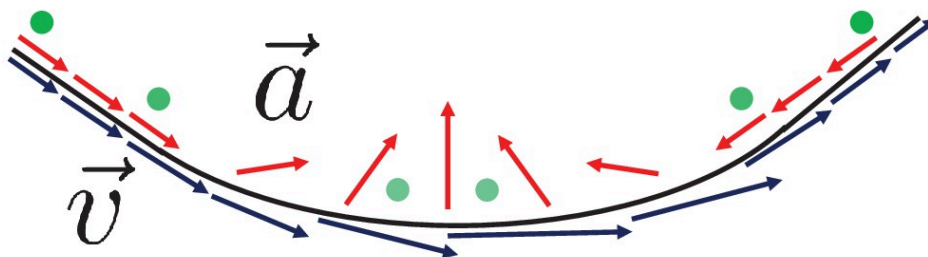
Ovdje je zanimljivo primijetiti da brzina gibanja ovisi, a kutna brzina ne ovisi o polu-mjeru kružnice. Upravo je u tome pogodnost kutne brzine jer opisuje kinematiku čestica

koje se "zajedno" vrte. Drugi izraz je zapis u vektorskom obliku koji daje vezu između smjerova pojedinih veličina. Vektorsko množenje je definirano tako da je smjer umnoška okomit na ravninu zadanu vektorima koje množimo (ovdje $\vec{\omega}$, \vec{r}) i određen pravilom desne ruke⁶. Kao smjer vektora $\vec{\omega}$ kod kružnog gibanja se uzima os vrtnje okomita na ravninu kružnice. Smjer je također zadan pravilom desne ruke tako da prste zavrtnemo u smjeru brzine čestice koja kruži \vec{v} te nam smjer određuje palac.

Izraz za ubrzanje koje uzrokuje promjenu samo smjera brzine \vec{v} (ne iznosa) nazivamo centripetalnim i glasi:

$$\vec{a}_{cp} = -\frac{v^2}{r}\hat{r} = -\omega^2\vec{r} \quad (2.13)$$

gdje je s \vec{r} označen vektor položaja materijalne točke koja se giba po zakrivljenoj putanji polumjera r , a \hat{r} je jedinični vektor smjera od središta zakrivljenosti prema materijalnoj točki (ovo ubrzanje odgovara crvenom vektoru na dnu doline prikazane na slici 2.19 usmjerenom prema središtu zakrivljenosti). U drugoj relaciji smo iskoristili i identitet iz (2.12).



Slika 2.19: Slika prikazuje malu kuglicu koja se giba unutar doline koja se sastoji od dvije ravne kosine i kružnog dna. Plave strelice predstavljaju vektore brzine \vec{v} , a crvene ubrzanja \vec{a} . Primijetite kako tijekom gibanja s jedne na drugu stranu odnos između ove dvije veličine prolazi kroz sljedeće faze (s lijeva na desno): isti smjer, otklon smjera ubrzanja prema brzini, okomiti odnos, daljnji otklon smjera, suprotan smjer.

Izlaganje u ovom poglavlju završimo još jednim zanimljivim razmišljanjem o prirodi Richarda Feynmana iz njegove knjige "The Character of Physical Law" (6. predavanje):

"I am going to tell you what nature behaves like. If you will simply admit

⁶Postavimo li prste desne ruke u smjeru vektora $\vec{\omega}$ te ih savijemo prema \vec{r} (s manjim kutom) palac nam daje smjer \vec{v} .

that maybe she does behave like this, you will find her a delightful, entrancing thing. Do not keep saying to yourself, if you can possibly avoid it, 'but how can it be like that?' because you will get 'down the drain,' into a blind alley from which nobody has yet escaped. Nobody knows how it can be like that."

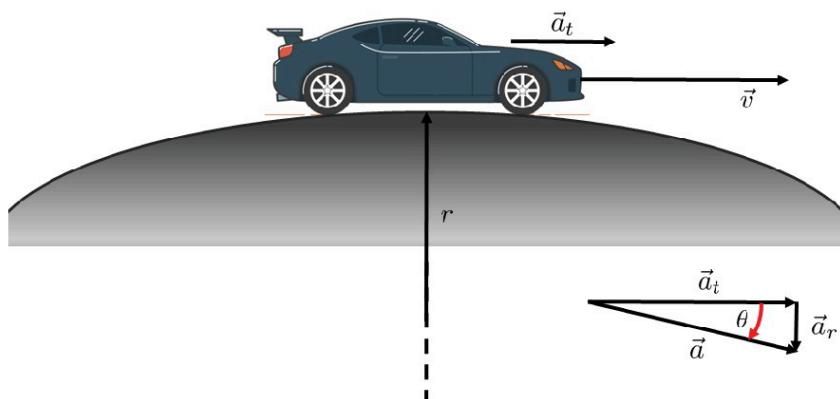
Slijedi niz riješenih zadataka koji ilustriraju tehnike i teoriju vezanu uz kinematiku.

Primjer 2.14 (Kinematika 2D). Biciklist se giba po kružnici polumjera 20 m brzinom 20 m/s. Odredite centripetalno ubrzanje.

Rješenje Izravno uvrštavanje u izraz (2.13) daje konačni rezultat:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r} = \frac{(20 \text{ m/s})^2}{20 \text{ m}} = 20 \text{ m/s}^2$$

Primjer 2.15 (Kinematika 2D). Automobil ubrzava jednoliko 0.400 ms^{-2} paralelno prema cesti po kojoj se vozi. U isto vrijeme prelazi preko brijega koji je u presjeku dio kružnice polumjera 630 m. U trenutku kada se nalazi na vrhu brijega kreće se brzinom 8.80 m/s horizontalno. Odredite akceleraciju automobila u tom trenutku (vektor).



Slika 2.20: Jednoliko gibanje po kružnici kao alat za analizu ubrzanog gibanja automobila pri prelasku preko brijega.

Rješenje Ovo je slučaj gdje u skladu s analizom sa stanovišta polarnog prikaza vektora ubrzanja istodobno postoji i tangencijalno i centripetalno ubrzanje tako da je ukupno ubrzanje:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t$$

Za početak je potrebno odrediti iznos radijalnog (centripetalnog) ubrzanja korištenjem (2.13) tako da uz $v = 8.80 \text{ m/s}$ te $r = 630 \text{ m}$ dobijemo:

$$a_r = -\frac{v^2}{r} = -\frac{(8.80 \text{ m/s})^2}{630 \text{ m}} = -0.123 \text{ m/s}^2$$

Sa slike 2.20 možemo, uzevši u obzir podatak iz zadatka $a_t = 0.400 \text{ m/s}^2$ zaključiti i napisati:

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2} = \sqrt{(-0.123 \text{ m/s}^2)^2 + (0.400 \text{ m/s}^2)^2} = 0.418 \text{ m/s}^2$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{a_r}{a_t} = -\frac{0.123}{0.400} = -17.1^\circ$$

iz ovog rezultata je jasno vidljiva razlika dviju fizičkih veličine: brzine i ubrzanja. Brzina je uvijek smjera tangente na putanju dok ubrzanje *nema* takvo ograničenje. Tijekom razmatranja sila moći ćemo se vratiti na ovaj primjer i opisati ga dinamički sa stajališta uzroka gibanja. ◀

2.4 Zakoni gibanja

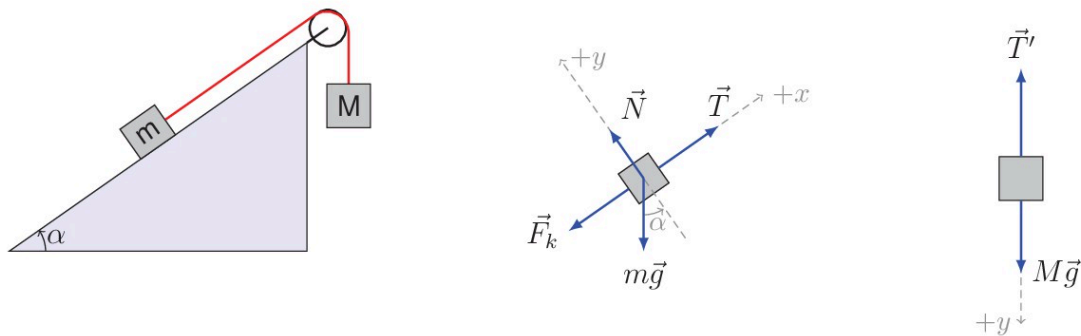
2.4.1 Koncept sile

Gotovo svi ljudi imaju osnovno razumijevanje koncepta sile iz svakodnevnog iskustva. Kada udariš loptu nogom djeluješ silom na nju. Slično tome, djelujemo silom na stol kada ga guramo, na torbu kada ju podižemo s tla i slično. U ovim je jednostavnim primjerima pojam sile povezan s tjelesnom aktivnošću i *promjenama* brzine tijela. Tijelo koje je mirovalo smo podigli - stavili u stanje gibanja. Sile ne uzrokuju uvijek gibanje. Ako stanete uz zid zgrade i djelujete silom na nju kako bi ju pomaknuli nećete uspjeti - brzina zgrade ostaje ista 0. Možeš držati torbu s ispruženom rukom. Jasno osjećaš da djeluješ silom da bi torba ostala nepomična u zraku.

Još je interesantnije kada baciš kamen. Jasno je da se brzina kamena stalno mijenja kao što smo već analizirali u odjeljku 2.3.2. Postavlja se pitanje što je tome uzrok? Što se događa ukoliko više sila istodobno djeluje na neko tijelo? Osnovni alat u kvantitativnoj analizi ovih pitanja opisujemo u sljedećem odjeljku.

2.4.2 Sila i dijagrami slobodnog tijela

Započnimo s jednim složenijim primjerom popisivanja i označavanja sila u sistemu s dva tijela. Ovo je ujedno najsloženija situacija koju ćemo razmatrati ovdje, a prikazuje sve elemente koji se javljaju i kod složenijih primjera. Na slici 2.21 je prikazan tipičan



Slika 2.21: Slika prikazuje jednostavan sistem - kosinu - na koju su postavljena dva tijela međusobno povezana idealnom nerastezljivom niti. Desno od skice se nalaze analize dijagramima slobodnog tijela sila koje određuju gibanje sistema. Redom imamo \vec{T} , \vec{T}' je napetost niti, \vec{F}_k je npr trenje klizanja, m , $(M)\vec{g}$ je gravitacija.

dijagram slobodnog tijela (FBD) i situacija obzirom na sile koje djeluju na pojedina tijela. U ovom koraku samo popisujemo koje sve sile djeluju na pojedino tijelo i predstavljamo ih u odabranom koordinatnom sustavu. Da bismo kvantitativno opisivali gibanje ovo će biti prvi korak koji često predstavlja probleme studentima jer se pojam sile u uobičajenom govoru koristi, ali vrlo često na nepotpun i neprecizan način. Najvažnija okolnost je navesti SVE sile koje djeluju na svako tijelo.

2.4.3 Newtonovi zakoni

Ovdje navodimo centralni rezultat istraživanja Isaaca Newtona koja je objavio u jednoj od najznačajnijih knjiga ikada napisanih djelo *Philosophiae naturalis principia mathematica* (visi sliku 2.22) koje uvodi prvu sveobuhvatnu fizičku teoriju prirode klasičnu mehaniku zasnovanu na preciznoj i rigoroznoj matematičkoj formulaciji.

Newtonovi zakoni gibanja mogu se formulirati na različite načine, ali uvijek imaju isti

smisao. Iskazi u ovom tekstu su uobičajeni u većini standardnih izvora⁷ (nisu doslovni prijevod Newtonovog teksta s latinskog, već su prilagođeni pedagoškom objašnjenju koji je povezan sa znanjima koja se stječu tijekom obrazovanja). Pojmovi "gibanje tijela", "brzina tijela" i "ubrzanje tijela" odnose se na centar masa tijela⁸.

1. zakon (Zakon inercije): Svako tijelo ostaje u stanju mirovanja (statička ravnoteža) ili jednolikoga gibanja po pravcu (dinamička ravnoteža) ukoliko je ukupni vektorski zbroj vanjskih sila nul vektor.
2. zakon (Temeljni zakon gibanja). Prvo iznosimo općeniti matematički iskaz drugog zakona izražen vremenskom promjenom količine gibanja \vec{p} koji ima sljedeći oblik:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \quad (2.14)$$

Razmotrimo sada čest slučaj gdje se tijelima ne mijenja masa tijekom gibanja. Matematički iskaz drugog zakona u tom slučaju se dobije iz prethodnog korištenjem uobičajenih pravila diferencijalnog računa te ima poznati oblik:

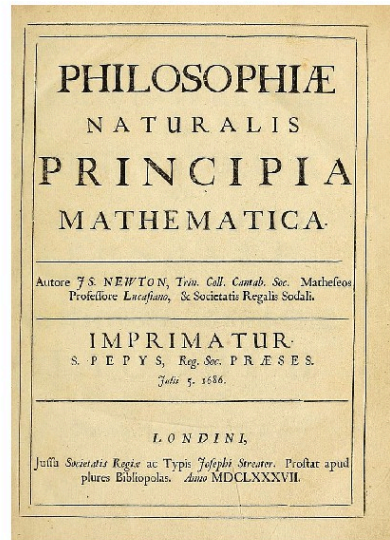
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \quad (2.15)$$

3. zakon (Zakon akcije i reakcije): Ako jedno tijelo djeluje silom na drugo tada i to drugo tijelo djeluje silom istog iznosa, suprotnog smjera na ono prvo. Te dvije sile leže na istom pravcu i predstavlja načelo kod međudjelovanja dvaju tijela da se sile uvijek javljaju u paru (jednu od njih, najčešće proizvoljno, nazivamo akcijom, a drugu reakcijom).

Ovako formulirani zakoni se odnose na materijalne točke i centar mase tijela u što ćemo se uvjeriti primjenom ovih zakona na protežna tijela i posebno važnu idealizaciju koju nazivamo kruto tijelo (ono kojem se ne može promijeniti oblik). Tada ćemo uvesti i opis vrtnje tijela kao složenog kolektivnog fenomena zajedničkog gibanja mnoštva materijalnih čestica.

⁷Ovdje je prilagođen vrlo dobar opis dostupan na https://hr.wikipedia.org/wiki/Newtonovi_zakoni_gibanja.

⁸Ovako formulirani zakoni vrijede samo za brzine puno manje od brzine svjetlosti (tzv. nerelativistička aproksimacija). Bez obzira na to gotovo svi inženjerski sistemi na Zemlji pripadaju ovoj klasi problema, a relativistička korekcija je daleko manja od pogrešaka mjerenja.

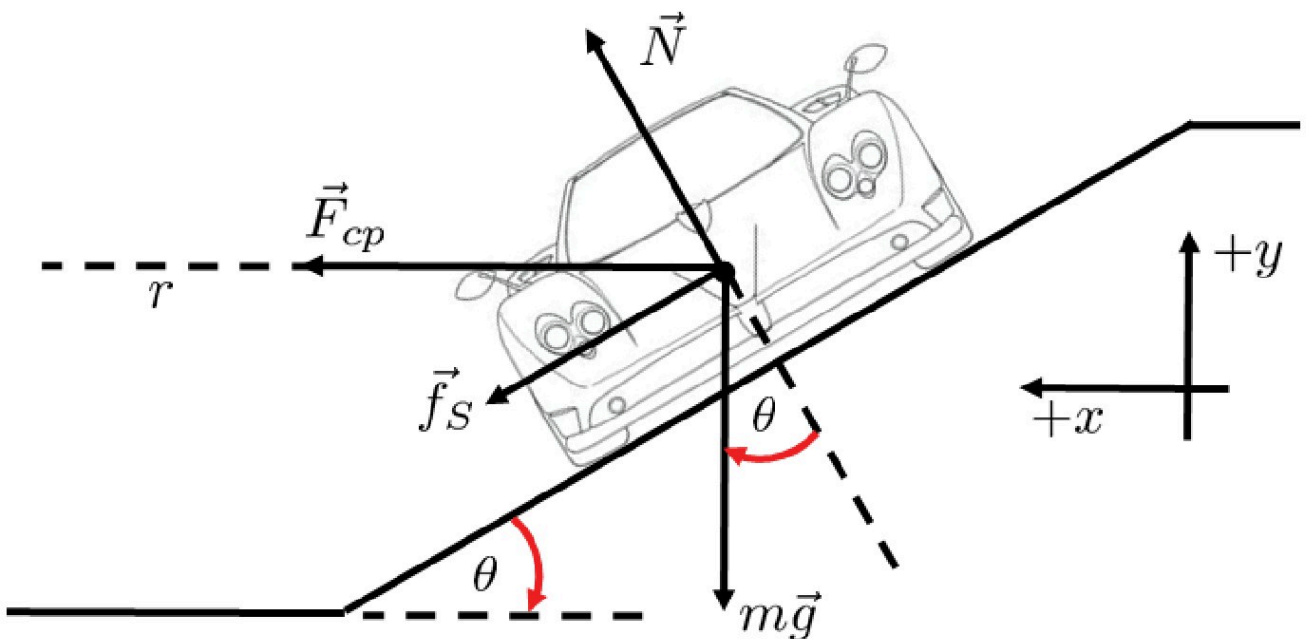


Slika 2.22: Naslovna stranica prvog izdanja *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. iz 1687.god. koja je osvijetlila zakone koji upravljaju univerzumom egzaktnim matematičkim jezikom koji je također formulirao sam Newton.

1. napomena: ne može se dovoljno naglasiti presudnu važnost činjenice da je sila \vec{F} na lijevoj strani 2. N. z. (2.14) UKUPNA sila na tijelo, dakle vektorski zbroj svih sila koje na njega djeluju. Njih dobivamo realizacijom točnog FBD-a (vidi 2.4.2).
2. napomena: bilo da sila ne djeluje ili je njihov vektorski zbroj nul vektor, prema 2. Newtonovom aksiomu tijelo ne ubrzava tako da je u stanju mirovanja ili jednolikog gibanja po pravcu. To navodi na pomisao da bi se moglo smatrati kako je prvi aksiom (zakon inercije) sadržan u drugom aksiomu (zakonu gibanja) kao njegov poseban slučaj. 1. N. z. navodi se izdvojeno jer Newton prvim aksiomom naglašava Galilejeve spoznaje (eksplicitno navodeći doprinos) kojima se znanost tog vremena raskida sve veze s zabudama Aristotelove fizike koja dominira akademskim prostorom gotovo dva tisućljeća (osnovna pogreška da je sila potrebna da bi se održalo jednoliko gibanje). Drugi (i važniji) razlog je to što 1.N.z. predstavlja temelj za definiranje tzv. inercijalnih sustava (sustava koji se relativno gibaju jednolikom brzinom) i u kojima vrijedi 2. N. z. Upravo tako definirani referentni sustavi predstavljaju polazište formulacije ostalih aksioma i drugih zakona klasične fizike koji u njima važe⁹.

⁹Drugim riječima, gore iskazani zakoni ne vrijede u neinercijalnim sustavima, npr poput onih koji se vrte - vrtuljak u parku.

Analizirajmo sada vrlo zanimljiv slučaj sa stanovišta primjene Newtonovih zakona: gibanje automobila tijekom prolaska zavojem na cesti s nagibom. Neka je r polumjer zakrivljenosti zavoja, μ_s koeficijent statičkog trenja (poprima vrijednosti od 0 do maksimalne, sila se samoprilagođava do početka klizanja). Uz oznake kao na slici 2.23 iz



Slika 2.23: Vožnja kroz zavoj cestom s nagibom. U ovom slučaju odustajemo od uobičajenog izbora koordinatnog sustava, a to je postavljanje jedne osi duž kosine. Ovdje je izbor pao na smjer centripetalne sile.

FBD-a možemo, obzirom na zadani koordinatni sustav, napisati 2. N. z. u komponentama:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= \mu_s N \cos \theta + N \sin \theta = m \frac{v^2}{r} \\ \sum F_y &= N \cos \theta - \mu_s N \sin \theta - mg = 0\end{aligned}\quad (2.16)$$

gdje prvi izraz predstavlja radijalnu (centripetalnu) silu u smjeru osi $+x$, a druga dinamičku ravnotežu u smjeru osi y . Ovdje smo zadali uvjete da se jedino mijenja smjer brzine i to prema uvjetima JKG-a, dakle gibanje stalnim iznosom brzine u horizontalnoj ravnini i mirovanje u vertikalnom smjeru (os y).

Izrazimo li normalnu silu N iz druge jednadžbe:

$$N = \frac{mg}{\cos \theta - \mu_s \sin \theta}$$

te ju uvrstimo u prvu dobijemo nužan uvjet koji povezuje iznos brzine, kut nagiba ceste i koeficijent statičkog trenja:

$$mv^2 = rmg \frac{\sin \theta + \mu_s \cos \theta}{\cos \theta - \mu_s \sin \theta}$$

Sada je potrebno razdvojiti konačni rezultat obzirom na iznos koeficijenta statičkog trenja μ_s i iznosa brzine gibanja. Naime na slici 2.23 sila trenja \vec{f}_S je usmjerena niz kosinu što odgovara situaciji kada smo blizu maksimalne brzine pri kojoj je moguće ostvariti uvjete iz (2.16). Pitanje minimalne brzine je složenije i pri malim brzinama smjer sile trenja je suprotan.

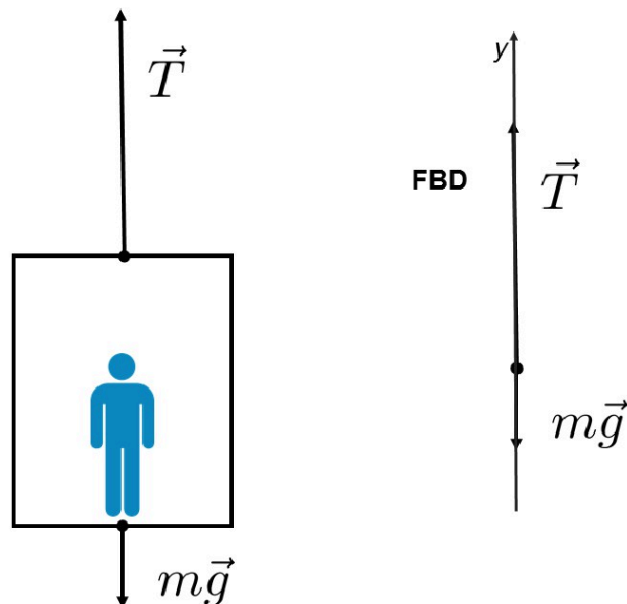
$$\begin{aligned} v_{max} &= \sqrt{rg \frac{\sin \theta + \mu_s \cos \theta}{\cos \theta - \mu_s \sin \theta}} = \sqrt{rg \frac{\tan \theta + \mu_s}{1 - \mu_s \tan \theta}} \\ v_{min} &= 0 \quad \mu_s \geq \tan(\theta) \\ v_{min} &= \sqrt{rg \frac{\sin \theta - \mu_s \cos \theta}{\cos \theta + \mu_s \sin \theta}} = \sqrt{rg \frac{\tan \theta - \mu_s}{1 + \mu_s \tan \theta}} \quad 0 \leq \mu_s < \tan(\theta) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Za brzine bliske v_{max} sila statičkog trenja je usmjerena niz kosinu, a za male brzine imamo kao prvo granični slučaj mirovanja na kosini, analiza u zadatku (2.23), koji predstavlja uvjet da automobil ne prokliže niti u slučaju kada ima brzinu $v = v_{min} = 0$. Za dani nagib ceste maksimalno statičko trenje dovoljnog maksimalnog iznosa osigurava kvantitativni uvjet napisan uz drugi redak jednadžbi (2.17). U suprotnom za dostupno statičko trenje postoji granični kut $\theta_c = \arctan(\mu_s)$ iznad kojeg automobil kliže niz kosinu ukoliko se ne vozi barem brzinom v_{min} iz trećeg retka jednadžbe (2.17). U tom slučaju statičko trenje ima smjer prema vrhu kosine i opire se klizanju prema dnu (naravno sve do proklizavanja automobila kada prelazi u trenje klizanja).

Primjer 2.16 (Zakoni gibanja). Kolika je (stalna) minimalna sila potrebna da bi se automobil mase 1200 kg iz mirovanja doveo do brzine od 100 km/h za 8.0 s?

Rješenje Krećemo od opažanja da se u ovom slučaju radi o 1D gibanju tijela koje ne mijenja masu tako da možemo iskoristiti najpoznatiji oblik 2. Newtonova zakona:

$$F_t = ma \quad a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{100/3.6 - 0 \text{ m/s}}{8.0 - 0.0 \text{ s}} = 3.5 \text{ m/s}^2$$



Slika 2.24: Dizalo i analiza sila koje djeluju na njega tijekom gibanja s FBD.

ovdje smo u računanju ubrzanja iskoristili otprije poznati faktor pretvorbe jedinica za brzinu $km/h \rightarrow m/s$. Konačno:

$$F_t = ma = (1200 \text{ kg})(3.5 \text{ m/s}^2) = 4200 \text{ N}$$

Konačni rezultat je zaokružen na dvije značajne decimalne znamenke. ◀

Primjer 2.17 (Zakoni gibanja). Dizalo, obješeno na čelično uže, ubrzava prema gore. Odredite sile i nacrtajte dijagram slobodnog tijela. Što se mijenja ako bismo uzeli u obzir i masu užeta?

Rješenje Obzirom da je problem 1D koristimo odabir sustava kao na slici 2.24 te označavamo dvije sile koje djeluju na dizalo: napetost užeta \vec{T} i gravitacijsku silu za koju smo uvrstili i izraz preko ubrzanja \vec{g} . Ako lift ubrzava prema gore vektorski zbroj ove dvije sile je pozitivan i rezultatna sila je prema gore.

Ako bismo uzeli u obzir i masu užeta trebali bismo masu dizala uvećati za taj iznos. ◀

Primjer 2.18 (Zakoni gibanja). Ako je maksimalna sigurna napetost čeličnog užeta dizala max. mase 1200 kg 14 kN odredite maksimalno sigurno ubrzanje pri gibanju

1. prema gore.
2. prema dolje.

Rješenje Krećemo od FBD prema slici 2.24 i formuliramo 2. Newtonov zakon uvažavajući zaključak iz prethodnom primjera da problem možemo promatrati kao 1D slučaj:

$$T - mg = ma \Rightarrow a_{max} = \frac{T_{max} - mg}{m} = \frac{(14000 \text{ N}) - (1200 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)}{1200 \text{ kg}}$$

1. Nakon izračuna dobivamo da je sigurno ubrzanje $a \leq 1.87 \text{ m/s}^2$.
2. Pri ubrzanju prema dolje napetost niti pada ispod težine tereta te je sve manja kako je ubrzanje veće pa prema tome nema ograničenja.



Primjer 2.19 (Zakoni gibanja). Pak za hokej mase 0.30 kg klizi po ledu praktično bez trenja. U jednom trenutku dva hokejaša udare pak istodobno tako da na pak djeluju silama iznosa 5.0 N pod kutom $\theta = -20.0^\circ$ i 8.0 N pod kutom $\theta = 60.0^\circ$ u odnosu na gibanje prije udarca. Odredite iznos i smjer ubrzanja. Kakva sila mora biti od udarca trećeg hokejaša pa da se pak nastavi gibati kao i prije udarca?

Rješenje Ovo je primjer gdje na tijelo djeluju 2 sile istodobno, a problem možemo smatrati 2D slučajem. Da bismo odredili ubrzanje potrebno je izračunati ukupnu silu koja djeluje na pak koji netom prije udarca giba jednoliko (stalnom brzinom). Najjednostavnije je izračun obaviti u 2D Cartesiusovom koordinatnom sustavu gdje smjer početne brzine zadaje x -os pa tako za x komponentu imamo:

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} = F_1 \cos(-20^\circ) + F_2 \cos(60^\circ) = (5.0 \text{ N})(0.940) + (8.0 \text{ N})(0.500) = 8.7 \text{ N}$$

i analogno za y komponentu:

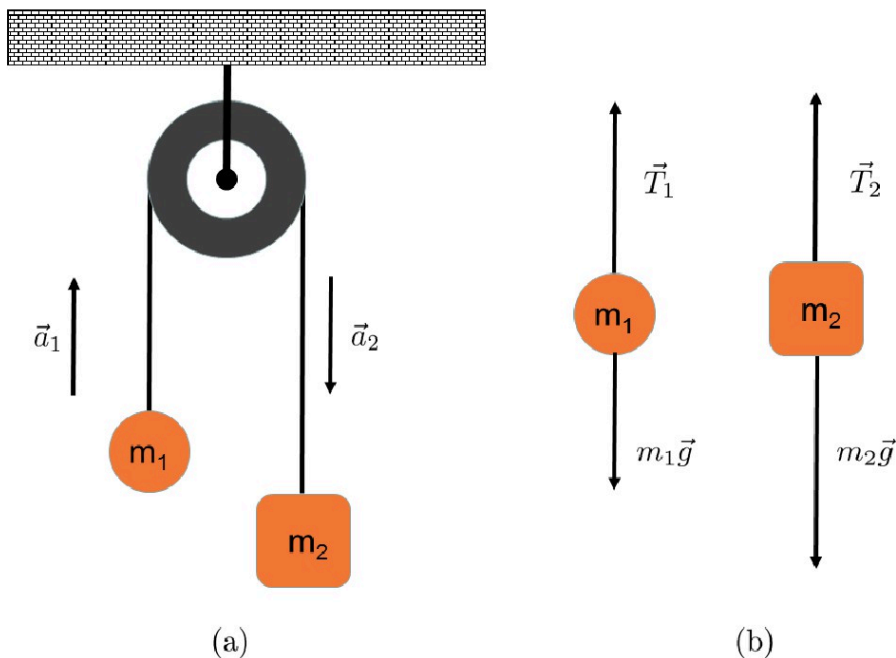
$$F_y = F_{1y} + F_{2y} = F_1 \sin(-20^\circ) + F_2 \sin(60^\circ) = (5.0 \text{ N})(-0.342) + (8.0 \text{ N})(0.866) = 5.2 \text{ N}$$

Ubrzanje možemo dobiti u vektorskom obliku uz izravnu primjenu 2. Newtonova zakona:

$$\vec{a} = \frac{F_x}{m} \hat{x} + \frac{F_y}{m} \hat{y} = \frac{8.7 \text{ N}}{0.30 \text{ kg}} \hat{x} + \frac{5.2 \text{ N}}{0.30 \text{ kg}} \hat{y} = (29 \text{ m/s}^2) \hat{x} + (17 \text{ m/s}^2) \hat{y}$$

Iznos ubrzanja i kut prema x osi su:

$$a = \sqrt{(29 \text{ m/s}^2)^2 + (17 \text{ m/s}^2)^2} = 34 \text{ m/s}^2 \quad \theta = \tan^{-1} \frac{a_y}{a_x} = 30^\circ$$



Slika 2.25: (a) Atwoodov padostroj. (b) dijagrami slobodnih tijela (FBD) na temelju kojih možemo napisati vezane jednadžbe gibanja oba tijela.

Da bi se ostvarilo stanje u kojem se pak giba jednoliko i nakon udaraca palicama treći hokejaš mora djelovati na pak silom koja je istog iznosa i suprotnog smjera. Time se osigurava da je ukupna sila na pak nul vektor, a to je upravo uvjet da se pak nastavi gibati jednoliko. Sila treće palice je:

$$\vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = -(8.7\text{ N})\hat{x} - (5.2\text{ N})\hat{y}$$

Primjer 2.20 (Zakoni gibanja). Atwoodov padostroj je sistem prikazan na slici 2.25. Odredite ubrzanje i opišite gibanje tijela 1 i 2, ako su povezana idealnom nerasteljivom niti preko bezmasene koloture. Ovaj problem je i jedna od laboratorijskih vježbi.

Rješenje Ovo je prvi primjer problema dva tijela koja međudjeluju. Slika 2.25 nam omogućava da napišemo jednadžbe gibanja za svako tijelo posebno koje u vektorskom obliku glase:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{1tot} &= \vec{T}_1 + m_1\vec{g} = m_1\vec{a}_1 \\ \vec{F}_{2tot} &= \vec{T}_2 + m_2\vec{g} = m_2\vec{a}_2\end{aligned}$$

Ovdje analizom možemo ustanoviti da iako je ovo očito višedimenzionalan problem svako tijelo obavlja 1D gibanje pa se gornje jednačbe znatno pojednostavljaju. Dobivamo sustav 2 jednačbe s 4 nepoznanice:

$$F_{1tot} = T_1 - m_1g = m_1a_1$$

$$F_{2tot} = T_2 + m_2g = m_2a_2$$

gdje smo uzeli u obzir da je pozitivni smjer za svako tijelo (zaseban 1D sustav) kao na slici 2.25. Ovakav matematički problem ima beskonačno mnogo rješenja i prema tome iako daje određenu informaciju o gibanju u sistemu ne daje željeni jednoznačni odgovor. Korak bliže željenom jedinstvenom rješenju smo ako primijetimo da je prema uvjetima u zadatku ubrzanje oba tijela isto. Razlog je u povezanosti nerastezljivom niti. Prema tome možemo staviti $a = a_1 = a_2$. Primjenom ovog geometrijskog ograničenja smo smanjili broj nepoznanica za jedan iz čega slijedi da još uvijek sustav linearnih jednačbi ima beskonačno mnogo rješenja. Sljedeća informacija dolazi primjenom 3. Newtonova zakona koji kaže da, ako jedno tijelo djeluje nekom silom na drugo tada i ovo drugo djeluje na prvo silom istog iznosa i suprotnog predznaka. U ovom slučaju tijela djeluju jedno na drugo preko napetosti u niti pa možemo definirati $T = T_1 = -T_2$ te konačno imamo linearni sustav dvije jednačbe s dvije nepoznanice:

$$T - m_1g = m_1a$$

$$-T + m_2g = m_2a$$

Zbrajanjem ove dvije relacije dobivamo:

$$m_2g - m_1g = m_1a + m_2a = (m_1 + m_2)a \Rightarrow a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}g \quad (2.18)$$

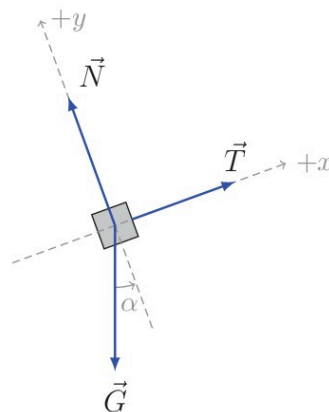
Ovdje smo dobili i nešto što obilježava Newtonovu mehaniku više međudjelujućih čestica, naime ubrzanje sistema kao cjeline jednako je omjeru ukupne vanjske sile na sistem koja je ovdje $(m_2 - m_1)g$ i ukupne mase $m_1 + m_2$. Sada možemo odrediti i napetost niti uvrštavanjem ubrzanja u bilo koju jednačbu s T :

$$T = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}g$$

Primijetimo da u slučaju da su obje mase iste $a = 0$, dakle gibanje je jednoliko, a ako je jedna masa znatno veća od druge imamo za $m_1 \gg m_2$ $a = -g$ slobodni pad.

Ovaj problem ćemo još jednom analizirati na drugi način u primjeru 3.3 na strani 68 pri čemu ćemo na drugi način dobiti istovjetan rezultat (3.12). ◀

Primjer 2.21 (Zakoni gibanja). Automobil težine 15000 N se šlepa na uzbrdici 20 stupnjeva stalnom brzinom. Ukoliko je trenje zanemarivo procijenite da li je šlep-uže ugroženo kidanjem ukoliko može podnijeti maksimalnu silu 6000 N?



Slika 2.26: Slika prikazuje jednostavan sistem - kosinu - na koju je postavljen automobil kojeg se šlepa užetom napetosti T .

Rješenje Na slici 2.26 koja predstavlja FBD u ovoj situaciji 1. Newtonov zakon nam daje sljedeće izraze:

$$F_x = T_x + N_x + G_x = 0$$

$$F_y = T_y + N_y + G_y = 0$$

Sa slike možemo izravno očitati sljedeće vrijednosti

$$\begin{array}{ll} T_x = T & T_y = 0 \\ N_x = 0 & N_y = N \\ G_x = -G \sin(\alpha) & G_y = -G \cos(\alpha) \end{array}$$

Sada možemo pojednostaviti jednadžbe za sile:

$$0 = T - G \sin(\alpha)$$

$$0 = N - G \cos(\alpha)$$

Odavde izravno možemo dobiti:

$$T = mg \sin(\alpha) = (15000 \text{ N}) \sin(20^\circ) = 5100 \text{ N}$$

te zaključujemo da se radi o sigurnom šlepanju jer je $T < 6000 N$. ◀

Primjer 2.22 (Zakoni gibanja). Automobil stane uz zaustavni put od 70 m uz početnu brzinu 80 km/h. Odredite koeficijent kinetičkog trenja ukoliko su kočnice potpuno blokirale kotače.

Rješenje Izravnom primjenom izraza za silu kod kinetičkog trenja i činjenice da je ta sila stalna dobivamo:

$$F_{tr} = \mu_k mg = ma = m \frac{v_p^2}{2s}$$

Odakle se dobiva rezultat $\mu_k = 0.36$ ◀

Primjer 2.23 (Statičko trenje). Automobil ostaje mirovati ukoliko je zakočen na kosini od 45 stupnjeva. Koliki je minimalni koeficijent statičkog trenja guma i podloge?

Rješenje Situacija je identična kao na slici 2.26 samo umjesto napetosti T imamo silu statičkog trenja F_S .

$$F_S = \mu_s N = \mu_s mg \cos(\theta)$$

Prema slici uvjet mirovanja iskazujemo jednadžbom da je ukupna sila u smjeru osi x nula:

$$0 = F_S - mg \sin(\theta) = \mu_s mg \cos(\theta) - mg \sin(\theta)$$

dakle je

$$\mu_s = \tan(\theta) = 1.0$$

Primjer 2.24 (Zakoni gibanja). Karlo gura drvenu kutiju mase 50 kg po lakiranom parketu stalnom brzinom 2.0 m/s. Odredite silu guranja ukoliko je koeficijent trenja klizanja s površinom 0.20. Ako Karlo prestane gurati koliko će se dodatno otklizati kutija? ◀

Rješenje Polazimo od činjenice da je gibanje jednoliko - stalnom brzinom što znači da je ubrzanje odnosno ukupna sila na kutiju nul vektor sve dok ju Karlo gura. Ovu činjenicu matematički možemo zapisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} F_x = 0 &= F_p - F_k \\ F_y = 0 &= N - G = N - mg \end{aligned}$$

Uzmemo li u obzir relaciju za trenje klizanja $F_k = \mu_k N = \mu_k mg$ dobivamo iz uvjeta na x osi:

$$F_p = F_k = \mu_k mg = (0.20)(50 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2) = 98 \text{ N}$$

U drugom dijelu zadatka Karlo prestaje djelovati silom te više ne možemo tvrditi da je ubrzanje nula pa jednadžbe 2. Newtonova zakona glase:

$$\begin{aligned} F_x &= 0 - F_k = ma_x \\ F_y &= N - G = N - mg = 0 \end{aligned}$$

sve ostalo je identično kao u prvom dijelu zadatka tako da imamo:

$$-F_k = -\mu_k mg = ma_x \quad a_x = -\mu_k g = -1.96 \text{ m/s}^2$$

Ovaj rezultat upućuje da se radi o JUG, usporavanju (negativan predznak). Da bismo odredili prijedeni put x_s do zaustavljanja možemo iskoristiti relaciju koja povezuje ubrzanje, početnu i konačnu brzinu:

$$v_k^2 = v_p^2 + 2as$$

koja u ovom slučaju ima oblik:

$$0 = v_{xp}^2 + 2a_x x_s \quad x_s = -\frac{v_{xp}^2}{2a_x} = -\frac{(2.0 \text{ m/s})^2}{2(-1.96 \text{ m/s}^2)} = 1.0 \text{ m}$$

Primjer 2.25 (Zakoni gibanja). Automobil mase 1500 kg vozi jednoliko brzinom 30 m/s. Vozač naglo počne kočiti uz koeficijent trenja 0.80. Odredite zaustavni put ukoliko se vozi po horizontalnoj cesti, usponu 10 i nizbrdici 10 stupnjeva.

Rješenje Ovaj zadatak je sličan drugom dijelu u prethodnom uz dodatnu komplikaciju da se zaustavljanje odvija na kosini. Pored ove geometrijske značajke dinamički je sve identično: imamo iste sile i JUG tako da će postupak biti sličan. Na osnovu FBD-a napišimo 2. Newtonov zakon za automobil:

$$\begin{aligned} F_x &= N_x + G_x + F_k = 0 - mg \sin(\theta) - \mu_k mg \cos(\theta) = ma_x \\ F_y &= N_y - G_y = N - mg \cos(\theta) = 0 \\ F_k &= \mu_k N \end{aligned}$$

Druga i treća relacija $N = mg \cos(\theta)$ su nam omogućile pojednostavljenje prve tako da imamo jednu jednadžbu s jednom nepoznanicom:

$$a_x = g \sin(\theta) - \mu_k g \cos(\theta) = -g(\sin(\theta) + \mu_k \cos(\theta))$$

Analogno prethodnom zadatku imamo:

$$0 = v_{xp}^2 + 2a_x x_s \quad x_s = \frac{v_{xp}^2}{2g(\sin(\theta) + \mu_k \cos(\theta))}$$

tako da koristeći ovo opće rješenje uz konkretne podatke imamo sljedeće vrijednosti zaustavnog puta:

$$x_s = \begin{cases} 48 \text{ m} & \theta = 10^\circ \\ 57 \text{ m} & \theta = 0 \\ 75 \text{ m} & \theta = -10^\circ \end{cases}$$

koji jasno pokazuju opasnost od prebrze vožnje *nizbrdo*. ◀

Primjer 2.26 (Zakoni gibanja). Dvije kutije mase 8.0 i 5.0 kg povezane su vrlo laganom nerastezljivoj niti uz rampu pod kutom od 37 stupnjeva tako da teža kutija okomito visi preko idealne koloture. Trenje klizanja je dato koeficijentom $\mu_k = 0.20$. Koliko je ubrzanje sistema kutija, a kolika je napetost niti?

Rješenje Zadatak je opisan u odjeljku koji se bavi FBD-om, a prikazan je na slici 2.21. Kao i u prethodnim zadacima na temelju FBD-a implementiramo jednadžbe gibanja za svako tijelo posebno. Kao i u zadatku 2.20 odmah ćemo primijeniti geometrijsko ograničenje da je ubrzanje oba tijela isto! Također na isti način je $T = -T'$ U skladu s oznakama na slikama 2.21 sredin i desno imamo:

$$\begin{aligned} F_x = T - G_x - F_k = T - mg \sin(\alpha) - F_k = ma \quad F'_x = 0 \\ F_y = N - G_y = N - mg \cos(\alpha) = 0 \quad F'_y = -T + G_y = -T + Mg = Ma \\ F_k = \mu_k N \end{aligned}$$

Za tijelo m možemo iz jednadžbe za smjer y osi odrediti normalnu silu N te uvrstiti u jednadžbu za smjer x osi čime smo dobili sistem dvije jednadžbe s dvije nepoznanice

koje možemo zbrojiti:

$$\begin{aligned} T - mg \sin(\alpha) - \mu_k mg \cos(\alpha) &= ma \\ -T + Mg &= Ma \\ \hline Mg - mg[\sin(\alpha) - \mu_k \cos(\alpha)] &= (m + M)a \\ a &= g \frac{M - m[\sin(\alpha) - \mu_k \cos(\alpha)]}{m + M} \end{aligned}$$

Preostaje samo uvrstiti zadane podatke u gornji rezultat:

$$a = (9.80 \text{ m/s}^2) \frac{(8.0 \text{ kg}) - (5.0 \text{ kg})[\sin(37^\circ) - 0.20 \cos(37^\circ)]}{(5.0 \text{ kg}) + (8.0 \text{ kg})} = 3.2 \text{ m/s}^2$$

Sada možemo izračunati i napetost niti:

$$T = M(g - a) = (8.0 \text{ kg})[(9.80 \text{ m/s}^2) - (3.2 \text{ m/s}^2)] = 53 \text{ N}$$

čime je zadatak riješen.

Primijetimo da izraz za ubrzanje a ovisi o kutu α tako da pri povećanju prema 90° (povećavamo nagib kosine) postaje identičan rezultatu za Atwoodov padostroj iz primjera 2.20:

$$a = g \frac{M - m[\sin(\alpha) - \mu_k \cos(\alpha)]}{m + M} = g \frac{M - m[1 - \mu_k \cdot 0]}{m + M} = \frac{M - m}{M + m}g$$

Primjer 2.27 (Zakoni gibanja). Vozilo se kreće zavojem koji je nagnut pod kutom od 20° uz polumjer zakrivljenosti $r=100$ m. Kolika je brzina vozila ukoliko je bočna sila statičnoga trenja na gume točno nula?

Rješenje Odgovarajući izraz se dobije iz jednadžbe (2.17) ukoliko u općem izrazu stavimo $\mu_S = 0$ jer ta situacija odgovara trenju 0.

$$v = \sqrt{r g \tan(\theta)} = \sqrt{(100 \text{ m}) (9.80 \text{ m/s}^2) \tan(20^\circ)} = 18.9 \text{ m/s}$$

FBD u ovoj situaciji je jednostavnija varijanta (2.16) i uz iste oznake kao na slici 2.23 imamo:

$$N \sin(\theta) = \frac{m v^2}{r} \quad 0 = N \cos(\theta) - mg$$

Nepoznate veličine su N i v . Kako ovdje računamo v najlakše je podijeliti ova dva izraza i eliminirati N te konačno dobivamo u skladu s (2.17)

$$v^2 = g r \tan(\theta)$$

Primjer 2.28 (Zakoni gibanja). Avion izvodi vertikalni luping po radijusu 1200 m konstantnom brzinom od 200 m/s. Odredite silu kojom pilot mase 80 kg pritišće sjedište na dnu luka! ◀

Rješenje Ovdje imamo slučaj JKG pri kojem je kružnica vertikalno postavljena tako da je uz uzgon zraka potrebno uzeti u obzir i težinu. Da bi se pilot održavao pri ovakvom gibanju na njega kao normalna sila N djeluje sjedište u avionu. Ukupna sila i 2. N. z. u ovom slučaju glase (samo na dnu luka tijekom lupinga!):

$$N - mg = \frac{m v^2}{r} \Rightarrow N = mg + \frac{m v^2}{r} = (80 \text{ kg}) \left(g + \frac{(200 \text{ m/s})^2}{1200 \text{ m}} \right) = 3451 \text{ N}$$

Dakle težina koju osjeća pilot je 4.4 puta veća od one kad mirno stoji na zemlji. Razmislite što je s težinom u vršnoj, najvišoj, točki lupinga? ◀

Poglavlje 3

Zakoni očuvanja

"Man's rational nature looks to find some presiding genius or logical principle behind, and giving consistency to, these decisions—a god of justice, a law of nature, etc. But such is not easily found even in these days, and the discovery is fragmentary. The English common law consists of half a dozen obvious propositions, but unfortunately no one knows what they are."

- Judge Dowdall, prezentacija na Centenary Meeting of the British Association for the Advancement of Science u svom članku "The Psychological Origins of Law," (1931)

3.1 Impuls sile i količina gibanja

Sudar ili sraz je kratkotrajno međudjelovanje dva tijela pri kojem se udaljenost smanjuje, a zatim povećava¹. To je ujedno jedan od najznačajnijih fizičkih fenomena u svemiru. Pretežna koncentracija tvari u svemiru je u zvijezdama, u stanju tvari koju nazivamo *plazma*, a tamo se odvija nezamisliv broj sraza između cijelog spektra različitih čestica dominantno upravljan značajkama *količine gibanja*. Fizika koju ovdje uvodimo na primjerima iz naše neposredne okoline je neopisivo univerzalna - upravlja procesima od pojava na subatmoskoj, atomskoj i na kraju kozmičkoj skali. Elegancija je u tome da os-

¹Osim u slučaju savršeno neelastičnog sraza kojeg ćemo promatrati posebno kao granični slučaj pri kojem se dva tijela "sljepe".

novni matematički izrazi ostaju gotovo nepromijenjeni u svim slučajevima. Razmatranja



Slika 3.1: Snimka deformacije loptice tijekom sraza s batom (izvor: UMass Lowell Baseball Research Center).

u ovom poglavlju započinjemo promatranjem djelovanja sile na tijelo tijekom određenog vremena. Primjeri takvih procesa su svugdje oko nas, a na slici 3.1 koja je načinjena posebnom kamerom koja obavlja veliki broj snimki po sekundi tako da se može razlučiti proces djelovanja sile na lopticu koja se našem "sporom" i grubom oku čini trenutnom.

3.2 Očuvanje količine gibanja

Odnos impulsa sile i količine gibanja izveden iz 2. Newtonova zakona je samo reformulacija na drugi način opisa dinamike jedne čestice. Ukoliko imamo više čestica koje međudjeluju Newton je teoriju učinio konzistentnom i primjenjivom na problem više čestica formulacijom 3. zakona - principa akcije i reakcije. Rezultat i pravi sadržaj tog zakona

je njegova posljedica *zakon očuvanja količine gibanja* koji predstavlja jedan od fundamentalnih zakona prirode. Sadržaj ovog zakona se može proanalizirati na primjeru 2 čestice gdje je moguće sagledati fizički sadržaj matematičkih izraza.

Promotrimo dinamiku sistema dvije čestice koje međudjeluju silama proizvoljne složenosti. 2. Newtonov zakona glasi:

$$\vec{F}_{2na1} = \frac{\Delta\vec{p}_1}{\Delta t}$$

$$\vec{F}_{1na2} = \frac{\Delta\vec{p}_2}{\Delta t}$$

zbrajanjem ovih izraza dobivamo:

$$\vec{F}_{2na1} + \vec{F}_{1na2} = \frac{\Delta\vec{p}_1}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{p}_2}{\Delta t}$$

gdje možemo uočiti da je prema 3. Newtonovu zakonu $\vec{F}_{2na1} = -\vec{F}_{1na2}$, a to znači da je lijeva strana izraza nul vektor pa dobivamo:

$$\vec{0} = \frac{\Delta\vec{p}_1}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{p}_2}{\Delta t} \cdot (\Delta t)$$

odakle slijedi:

$$\vec{0} = (\Delta\vec{p}_1) + (\Delta\vec{p}_2) = (\vec{p}'_1 - \vec{p}_1) + (\vec{p}'_2 - \vec{p}_2)$$

gdje smo s crticom označili vektore količine gibanja na kraju promatranog vremena Δt . Jednostavno preuređenje izraza na način da s lijeve strane jednakosti imamo količine gibanja na početku, a na desnoj na kraju promatranog intervala vremena dobivamo:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \quad (3.1)$$

što predstavlja *zakon očuvanja količine gibanja* (ZOKG) u slučaju dvije čestice jer se ukupna količina gibanja ne mijenja tijekom proteka vremena. Ukoliko ovo razmatranje uzastopno primijenimo na niz intervala Δt vidimo da zakon nije ograničen na kratko vrijeme već vrijedi uvijek. Važno je primijetiti da se tijekom razmatranja nismo oslanjali na niti jednu posebnost sila međudjelovanja. Bez obzira kako komplicirano bilo međudjelovanje koje opisujemo silama između čestica zakon vrijedi *bez obzira* na prirodu sila. Također ukupna vanjska sila na bilo koju česticu mora biti nul vektor što obično iskazujemo da je sistem *izoliran*.

Bez dokaza² navodimo općeniti iskaz *zakona očuvanja količine gibanja* koji iskazujemo vektorskom jednadžbom:

$$\vec{P}_{tot} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_N = konst. \quad (3.2)$$

koji vrijedi za bilo koji broj čestica i ne ovisi o vrstama sila međudjelovanja između čestica, a možemo ga iskazati sljedećom tvrdnjom:

Teorem 3.2.1. *Ukupna količina gibanja izoliranog sistema je vektorska konstanta. Međudjelovanje unutar sistema ne mijenja ukupnu količinu gibanja.*

Možemo konstatirati da je duboki smisao 3. Newtonova zakona iskaz *zakona očuvanja količine gibanja* u kontekstu ostalih zakona gibanja, a obzirom na duboku važnost i univerzalnost ovog rezultata možemo samo nagađati o veličini imaginacije ovog velikog fizičara i znanstvenika 17. stoljeća. Bez dokazivanja navodimo još jedan važan rezultat koji ćemo koristiti u primjeni Newtonovih zakona na sisteme čestica i posebno na *kruto tijelo* ($\vec{F}_{v,na i}$ označava vanjsku silu na česticu i u sistemu):

$$\vec{F}_{v,na 1} + \vec{F}_{v,na 2} + \dots + \vec{F}_{v,na N} = \vec{F}_{v,tot} = \frac{\Delta \vec{P}_{tot}}{\Delta t} \quad (3.3)$$

Dakle, **brzina promjene ukupne količine gibanja je jednaka vektorskom zbroju svih vanjskih sila na sistem**, a izraz (3.2) možemo smatrati specijalnim slučajem (3.3) kada je vektorski zbroj vanjskih sila na sistem nul vektor.

Primjer 3.1 (Očuvanje količine gibanja). Raketa je lansirana uspravno i u trenutku kada dostigne visinu od 1 000 m pri brzini 300 m/s, eksplodira u tri fragmenta iste mase. Jedan fragment nastavlja gibanje uspravno brzinom 450 m/s nakon eksplozije, a drugi istočno brzinom 240 m/s. Odredite brzinu trećeg fragmenta \vec{v}_{3f} (3D vektor).

Rješenje Kako je eksplozija "pravedno" raspodijelila masu svaki od tri fragmenta ima masu $M/3$. Ukupna početna količina gibanja je dana s:

$$\vec{p}_p = M\vec{v}_p = M(300 \text{ m/s})\hat{y}$$

²Općeniti dokaz je samo nešto tehnički složenija varijanta prezentiranog slučaja dvije čestice i može se pronaći u literaturi [3].

Nakon eksplozije ukupna količina gibanja je:

$$\vec{p}_k = \frac{M}{3}(240 \text{ m/s})\hat{x} + \frac{M}{3}(450 \text{ m/s})\hat{y} + \frac{M}{3}\vec{v}_{3f} +$$

Kako nam vrijedi ZOKG (3.2) vrijedi $\vec{p}_p = \vec{p}_k$ imamo:

$$\frac{M}{3}(240 \text{ m/s})\hat{x} + \frac{M}{3}(450 \text{ m/s})\hat{y} + \frac{M}{3}\vec{v}_{3f} = M(300 \text{ m/s})\hat{y} \quad / \times \frac{3}{M}$$

što predstavlja sustav tri jednadžbe s tri nepoznanice koji ima kao rješenje:

$$\vec{v}_{3f} = (-240 \text{ m/s})\hat{x} + (450 \text{ m/s})\hat{y}$$

Primjer 3.2 (Impuls sile). U posebnom "crash" testu automobil mase 1500 kg udara u zid. Početna i konačna brzina su redom $\vec{v}_p = (-15.0 \text{ m/s})\hat{x}$ i $\vec{v}_k = (2.60 \text{ m/s})\hat{x}$. Ako sudar traje 0.150 s ocijenite impuls te prosječnu silu na automobil.

Rješenje Za početak ćemo se ograničiti na određivanje samo sile koju zid u koji vozilo udara uzrokuje. Ovo je obično vrlo dobro približenje obzirom da su ostale horizontalne sile u ovakvim procesima obično znatno manje.

Za količinu gibanja automobila prije i poslije sudara možemo staviti:

$$\vec{p}_p = m\vec{v}_p = (1500 \text{ kg})(-15.0 \text{ m/s})\hat{x} = (-2.25 \times 10^4 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}})\hat{x}$$

$$\vec{p}_k = m\vec{v}_k = (1500 \text{ kg})(2.60 \text{ m/s})\hat{x} = (0.39 \times 10^4 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}})\hat{x}$$

Sada možemo odrediti impuls sile:

$$\begin{aligned} \vec{I} = \langle \vec{F}_{zid} \rangle \Delta t = \Delta \vec{p} = \vec{p}_k - \vec{p}_p = \\ (0.39 \times 10^4 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}})\hat{x} - (-2.25 \times 10^4 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}})\hat{x} = (2.64 \times 10^4 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}})\hat{x} \end{aligned}$$

Srednja sila kojom je zid djelovao na automobil je:

$$\langle \vec{F}_{zid} \rangle = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{(2.64 \times 10^4 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}})\hat{x}}{0.150 \text{ s}} = (1.76 \times 10^5 \text{ N})\hat{x}$$

Zanimljivo je promotriti situaciju u kojoj je sraz savršeno neelastičan tako da se automobil ne odbije od zida. Da li je u tom slučaju sila kojom zid djeluje na automobil veća ili

manja. Ukoliko analiziramo situaciju sa stajališta Newtonovih zakona jasno je da u tom slučaju dovoljno je da sila zida samo zaustavi automobil, a ne da ga nakon sraza i ubrza u suprotnom smjeru. Očekujemo manju prosječnu silu u što se možemo jednostavno uvjeriti ako ponovimo izračun tako da stavimo za konačnu brzinu nul vektor. Rezultat je tada:

$$\langle \vec{F}_{zid} \rangle = (1.50 \times 10^5 \text{ N}) \hat{x}$$

u što se čitatelj može sam uvjeriti. ◀

3.2.1 Koeficijent restitucije

Koeficijent restitucije u srazu dva tijela se definira kao omjer relativnih brzina prije i poslije sraza:

$$e = -\frac{v_{ak} - v_{bk}}{v_{ap} - v_{bp}} \quad (3.4)$$

Ova veličina je pogodna za analizu sraza dva tijela u cijelom rasponu mogućnosti od savršeno elastičnog do savršeno neelastičnog slučaja. U primjeru 3.7 ćemo pokazati da slučaj $e = 1$ odgovara savršeno elastičnom, a $e = 0$ savršeno neelastičnom srazu (razmislite zašto). Vrijednosti između ovih ekstremnih pokrivaju sve realne situacije tako da ćemo praktičnu vrijednost ove veličine prikazati s pomoću nekoliko primjera na kraju ovoga poglavlja.

3.3 Očuvanje mehaničke energije

3.3.1 Koncept energije i promjena oblika

Promjene oblika energije tijekom procesa je vrlo moćan intelektualni alat i jedan je od najznačajnijih doprinosa fizičara znanosti uopće. Omogućava praktičnu analizu nevjerovatno velika broja fenomena u prirodi, a 20. stoljeće je pokazalo iznenađujuću vezu između energije i informacije, otkriće koje je u temelju oluje otkrića znanosti o informaciji i komunikaciji. Nabrojimo neke od primjera:

- Organizirano gibanje golemih količina vode usmjereno na turbine u elektranama koristi proces pretvorbe gravitacijske potencijalne energije vode u kinetičku energiju vrtnje rotora generatora električne struje. Korištenje bilo kojeg električnog uređaja u kućanstvu pretvara električnu energiju u druge oblike, svjetiljke (termička u žarnoj niti pa elektromagnetski valovi), hladnjaci koriste složen niz pretvorbi među kojima je tlačenje plina u sustavu pri čemu se tijekom tlačenja dio unutrašnje energije plina pretvara u nasumično gibanje molekula.
- Tijekom izgaranja goriva kemijska energija veza između atoma reakcijom se pretvara u termičku energiju nasumičnog gibanja molekula.
- Sabijanje i rastezanje elastične opruge obavljani rad sprema kao elastičnu potencijalnu energiju.
- Termonuklearna reakcija fuzije atoma vodika na Suncu se sastoji iz pretvorbe nuklearne energije u elektromagnetske valove koji ju zračenjem prenose do našeg planeta na kojem uzrokuju gotovo sve pojave. Ovo je lijepo objašnjeno u jednom od, prema osobnom stavu autora, najljepših znanstvenih objašnjenja:

The sun's rays are the ultimate source of almost every motion which takes place on the surface of the earth. By its heat are produced all winds, . . . By their vivifying action vegetables are elaborated from inorganic matter, and become, in their turn, the support of animals and of man, and the sources of those great deposits of dynamical efficiency which are laid up for human use in our coal strata.

koje je u svojem djelu *Treatise on Astronomy* iz 1833.god. napisao briljantni fizičar John Herschel.

Najvažnija zakonitost je da se tijekom nebrojeno mnogo ovih procesa ukupna energija ne mijenja iako se događaju pretvorbe jednog oblika u drugi.

Za svaki fizički proces tijekom kojeg se događaju pretvorbe energije možemo izdvojiti dva stanja: početno (p) i konačno (k). Karakterizaciju procesa možemo učiniti zadavanjem promjena svih oblika energije koji u njemu sudjeluju. Tako za neki oblik m od ukupno M vrsta energije imamo za promjenu:

$$\Delta E_m = E_{m,k} - E_{m,p}$$

Sačuvanje energije jednostavno znači da je zbroj svih tih promjena 0:

$$0 = \Delta E_1 + \Delta E_2 + \dots + \Delta E_M = \sum_{k=1}^M \Delta E_k \quad (3.5)$$

Važno je primijetiti da za primjenu ovog fundamentalnog zakona prirode kojeg, prema dosadašnjim opažanjima, egzaktno slijede svi procesi u prirodi moramo nekako otkriti kvantitativne zakonitosti promjene svih pretvorbi koje sudjeluju u procesu. Druga važna činjenica vezana s izrazom (3.5) je da moramo uzeti u obzir *SVE* oblike energije tako da u slučaju analize gdje nam ovaj zbroj nije nula imamo problem izostavljanja barem jednog oblika.

Jednadžba (3.5) je egzaktna za svaki izolirani sistem, ali u primjenama mi gotovo uvijek promatramo samo odabrani skup objekata koje nazivamo *sistem*. Ostatak univerzuma proglašavamo *okolinom* tako da promatramo promjene energije između početnog i konačnog stanja posebno za svaki dio ove podjele. Kako je energija očuvana dio koji napusti *okolinu*, prelaskom granice, završava u cijelosti unutar *sistemu*. Sad možemo formulirati praktičnu operativnu verziju zakona očuvanja energije:

Teorem 3.3.1. *Ukoliko sistem i pripadni okoliš prijeđu iz zadanog početnog u određeno konačno stanje ukupna promjena energije je egzaktno 0.*

Matematički iskaz ovog zakona je dan sljedećim izrazom:

$$\Delta E = \Delta E_{sistem} + \Delta E_{okoli} = 0 \quad (3.6)$$

Iz prethodnog izraza možemo precizirati i pojam *izoliranoga* sistema. To je svaki sistem kod kojeg nema promjene energije u *okoliju* ili matematički:

$$0 = \Delta E_{okoli} = \Delta E_{sistem} \quad (3.7)$$

U fundamentalnim istraživanjima ukoliko se sretnemo sa slučajem kada nam je narušena relacija (3.6) to ponekada upućuje na postojanje nepoznatog objekta u sistemu kojeg nismo opazili ili pak na sasvim novi oblik energije³.

³Ovo vrijedi ukoliko se ne radi o pogrešci u primjeni zakona fizike.

3.3.2 Kinetička energije

Prvi oblik energije koji ćemo proučavati je energija povezana s koherentnim gibanje molekula koje tvore tijelo mase m . Ova se energija naziva kinetička (prema grčkoj riječi "kinitós", koji se kreće, pokretan). Razmotrimo kamen koji pada s određene visine (u smjeru gibanja postavimo y -os). Za promatrača u mirovanju prema tlu, kamen ima brzinu $\vec{v} = v_y \hat{y}$. Iznos brzine kamena je veličina u ovom slučaju v_y . Kinetička energija tijela mase m koje se giba brzinom iznosa v , a da se pri tome ne vrti definiramo kao skalarnu veličinu:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad (3.8)$$

SI jedinica je prema izrazu (3.8) $kg\ m^2\ s^{-2}$ i upravo se ova kombinacija definira kao džul (po Jamesu Jouleu). Obzirom da je ova definicija skalarna vrijednost ne ovisi o smjeru vektora brzine - samo o iznosu i to kao polinom drugog stupnja. Sada ovu definiciju možemo primijeniti na navedeni primjer padanja kamena u dva odabrana trena tijekom pada: početni (i) i konačni (f). Promjena kinetičke energije kaena u padu između dva odabrana stanja je dana sa:

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_k^2 - \frac{1}{2}mv_p^2 \quad (3.9)$$

U sljedećem odjeljku ćemo ovaj izraz povezati sa silama i ostalim relevantnim fizičkim veličinama u vrlo važan teorem.

3.3.3 Teorem rada i kinetičke energije

Postoji izravna veza između ukupnog rada obavljenog vanjskim silama točkastom objektu i promjene njegove kinetičke energije. Ako je ukupan rad na objektu različit od nule to znači da je na objekt djelovala rezultantna sila različita od nulvektora, a posljedica je ubrzanje, promjena brzine te konačno i kinetičke energije.

Teorem 3.3.2. *Ukupni rad svih sila (konzervativne i nekonzervativne) obavljen nad točkastim objektom čije gibanje slijedi Newtonove zakone je jednak promjeni njegove kinetičke energije.*

Precizan matematički iskaz ovog zakona uz izraz (3.9) je:

$$W_{tot} = W_{kon} + W_{nkon} = \Delta K = K_k - K_p = \frac{1}{2}mv_k^2 - \frac{1}{2}mv_p^2 \quad (3.10)$$

gdje smo s W_{kon} označili ukupni rad konzervativnih sila (gravitacija, elastična sila, električna) na tijelo, a s W_{nkon} nekonzervativnih (trenje, otpor zraka). v_k je konačna, a v_p početna brzina. U idućim poglavljima ćemo poopćiti ovaj rezultat i na gibanje tijela. Ovaj rezultat se može zapisati i kao zakon očuvanja energije (ukoliko nema disipativnih nekonzervativnih doprinosa) za izolirani sistem prema (3.7):

$$\Delta E_{sistem} = 0 = E_{tot,k} - E_{tot,p} \Rightarrow E_{tot} = \frac{1}{2}mv_p^2 + P_p = \frac{1}{2}mv_k^2 + P_k \quad (3.11)$$

gdje je potrebno uvrstiti doprinose svih oblika potencijalne energije P ! Pogledajmo kako možemo analizirati Atwoodov padostroj (primjer 2.20 analiziran na stranici 50 primjenom Newtonovih zakona) korištenjem izraza (3.11).

Primjer 3.3 (TRKE). Atwoodov padostroj je sistem prikazan na slici 2.25 na stranici 50. Odredite brzinu nakon podizanja(spuštanja) tijela 1(2) za visinu h , ako su povezana idealnom nerastetljivom niti preko bezmasene koloture. Sistem se pušta u gibanje iz mirovanja. Ovaj problem se proučava i u okviru jedne od laboratorijskih vježbi.

Rješenje U ovom primjeru izravnom primjenom (3.11) možemo napisati:

$$\frac{1}{2}m_1v_p^2 + m_1gy_{1p} + \frac{1}{2}m_2v_p^2 + m_2gy_{2p} = \frac{1}{2}m_1v_k^2 + m_1gy_{1k} + \frac{1}{2}m_2v_k^2 + m_2gy_{2k}$$

gdje smo iskoristili činjenicu da je iznos brzine oba tijela isti kao što smo objasnili u primjeru 2.20. Početni uvjet je mirovanje pa je $v_p = 0$ te izraz možemo pojednostaviti:

$$m_1g(y_{1p} - y_{1k}) + m_2g(y_{2p} - y_{2k}) = \frac{1}{2}m_1v_k^2 + \frac{1}{2}m_2v_k^2$$

$$m_1g(y_{1p} - y_{1k}) + m_2g(y_{2p} - y_{2k}) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_k^2 = m_1g(-h) + m_2gh = (m_2 - m_1)gh$$

gdje smo uvažili da je $h = y_{2p} - y_{2k} = -(y_{1p} - y_{1k})$. Konačno dobivamo izraz za iznos brzine:

$$v_k^2 = 2 \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} gh \quad (3.12)$$

Ovaj izraz je formalno sličan relaciji koja povezuje konačnu brzinu prilikom jednolikoga ubrzanja nakon prevaljene udaljenosti h (2.5) uz ubrzanje:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}g = \frac{1 - \frac{m_1}{m_2}}{1 + \frac{m_1}{m_2}}g$$

i usporedbom ovog rezultata s (2.18) vidimo da smo dobili identičan rezultat (uz uvažavanje činjenice da je gravitacijska sila konstantna tako da se radi o JUG). Korektnost rezultata možemo provjeriti u slučaju kada je $m_1 \ll m_2$ pri čemu dobivamo $a = g$, dakle slobodni pad. To je očekivan rezultat jer smo zanemarili masu lakšeg tijela $m_1 \sim 0$ tako da m_2 slobodno pada. ◀

Primjer 3.4 (TRKE). Odredite srednju snagu motora automobila mase 1.2 t ukoliko je pri horizontalnom gibanju potrebno jednoliko ubrzati od 30 km/h do 100 km/h u 10 s. Odredite srednju snagu da bi se isto ubrzanje dogodilo pri usponu uz nagib 10 stupnjeva.

Rješenje Ovaj problem spada u kategoriju izravne primjene izraza za fizičku veličinu, u ovom slučaju srednju snagu, koju uz standardne oznake računamo prema definiciji i teoremu (3.10):

$$\langle P_{kin} \rangle = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{K_k - K_p}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}mv_k^2 - \frac{1}{2}mv_p^2}{\Delta t} = \frac{1}{2}m \frac{v_k^2 - v_p^2}{\Delta t}$$

Uvrštavanjem iznosa zadanih u zadatku možemo dobiti za snagu pogona koju isporučuje motor automobila:

$$\langle P_{kin} \rangle = \frac{1}{2}(1200 \text{ kg}) \frac{(100/3.6 \text{ m/s})^2 - (30/3.6 \text{ m/s})^2}{10 \text{ s}} = 42 \text{ kW}$$

Ukoliko se ubrzavanje događa na cesti uz zadani nagib $\theta = 10^\circ$ potrebno je gornji izraz nadopuniti radom konzervativne gravitacijske sile koja ovdje ima negativan predznak:

$$\langle P_{kin} \rangle + \langle P_g \rangle = \frac{\Delta W_{tot}}{\Delta t}$$

Gdje je osim snage vučne sile motora dodan i doprinos rada gravitacijske sile koji mo-

žemo raspisati korištenjem standardnih relacija:

$$\begin{aligned} \langle P_{kin} \rangle &= - \langle P_g \rangle + \frac{\Delta K}{\Delta t} = - \frac{-mg(h_k - h_p)}{\Delta t} + \frac{K_k - K_p}{\Delta t} = \\ &= mg \frac{\Delta h}{\Delta t} + \frac{1}{2} m \frac{v_k^2 - v_p^2}{\Delta t} = mg \frac{(\Delta s) \sin(\theta)}{\Delta t} + \frac{1}{2} m \frac{v_k^2 - v_p^2}{\Delta t} = \\ &= mg \frac{(\Delta s)}{\Delta t} \sin(\theta) + \frac{1}{2} m \frac{(v_k - v_p)(v_k + v_p)}{\Delta t} = mg \langle v \rangle \sin(\theta) + m \frac{v_k + v_p}{2} \frac{v_k - v_p}{\Delta t} = \\ &= mg \langle v \rangle \sin(\theta) + m \langle v \rangle a = m \langle v \rangle [g \sin(\theta) + a] \end{aligned}$$

Ovo je općeniti izraz za minimalnu snagu motora koja ubrzava na kosini zadanog nagiba. Iz ovih izraza možemo napisati najpovoljniji za izračun u ovom zadatku:

$$\langle P_{kin} \rangle = mg \frac{v_k + v_p}{2} \sin(\theta) + m \frac{v_k + v_p}{2} \frac{v_k - v_p}{\Delta t} = m \frac{v_k + v_p}{2} \left[g \sin(\theta) + \frac{v_k - v_p}{\Delta t} \right]$$

iz čega konačno imamo:

$$\begin{aligned} \langle P_{kin} \rangle &= (1200 \text{ kg}) \frac{(27.8 \text{ m/s}) + (8.33 \text{ m/s})}{2} \\ &= \left[(9.80 \text{ m/s}^2) \sin(10^\circ) + \frac{(27.8 \text{ m/s}) - (8.33 \text{ m/s})}{10 \text{ s}} \right] = \\ &= (1200 \text{ kg})(18.0 \text{ m/s}) [(1.70 \text{ m/s}^2) + (1.94 \text{ m/s}^2)] = 79 \text{ kW} \end{aligned}$$

Primjer 3.5 (TRKE). Tijelo mase 8.0 kg horizontalno povlači nepoznata sila po podlozi bez trenja. Ako je brzina nakon vuče uz pomak 3.0 m 3.5 m/s . Što će se dogoditi ako udvostručimo vučnu silu pri čemu blok ubrzava do iste konačne brzine kao i u prethodnom slučaju? Odredite iznos pomaka u ovom slučaju i usporedite s prethodnim sa stanovišta energije. Istu analizu ponovite i s vremenom potrebnim za ubrzavanje na zadanu konačnu brzinu.

Rješenje Rad je dan s $W = F \Delta x$. Sada možemo izravno primijeniti TRKE (3.10):

$$W = F \Delta x = K_k - K_p = \frac{1}{2} m v_k^2 - 0 \Rightarrow F = \frac{\frac{1}{2} m v_k^2}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{2} (8.0 \text{ kg}) (3.5 \text{ m/s})^2}{3.0 \text{ m}} = 16 \text{ N}$$

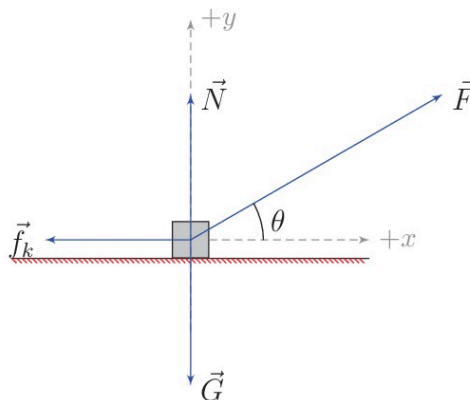
Ako na tijelo djeluje dvostruko veća sila $F' = 2F$ onda očekujemo da će se ista konačna brzina doseći pri kraćem pomaku. Ista konačna brzina znači ista promjena kinetičke energije pa imamo:

$$\Delta K = F \Delta x = F' \Delta x' \Rightarrow \Delta x' = \frac{F}{F'} \Delta x = \Delta x / 2$$

Slično i za vrijeme očekujemo da je kraće. U to se možemo uvjeriti i kvantitativno ukoliko primijetimo da su sile stalne pa imamo JUG (vidi 2.2.3) koje u oba slučaja daje istu prosječnu brzinu pa imamo uz prethodnu relaciju rezultat:

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} \Rightarrow \Delta t' = \frac{\Delta x'}{\Delta x} \Delta t = \Delta t / 2$$

u skladu s očekivanjem u ovom problemu. ◀



Slika 3.2: FBD za kutiju koju se povlači silom \vec{F} po podlozi uz prisutnost trenja klizanja \vec{f}_k .

Primjer 3.6 (TRKE). Analizirajte sistem iz primjera 3.5 uz prisustvo trenja. Kao i u prethodnoj analizi neka na blok mase 8.0 kg koji miruje na potpuno ravnoj horizontalnoj plohi horizontalno počne djelovati stalna sila 16 N.

1. odredite brzinu bloka nakon što ga je primijenjena sila pomaknula 2.0 m ukoliko je koeficijent kinetičkoga trenja (klizanja) s površinom 0.17;
2. promotrite situaciju ukoliko se sila primjeni pod nekim kutom θ prema plohi po kojoj se blok kreće. Pod kojim kutom treba primijeniti silu tako da dobijemo maksimalnu konačnu brzinu?

Rješenje Kao i u prethodnom primjeru 3.5 rad sile koja vuče blok iznosi $W = F \Delta x = (16 \text{ N})(2.0 \text{ m}) = 32 \text{ J}$. U prvom slučaju FBD je dan na slici 3.2 uz $\theta = 0$. U tom slučaju ravnoteža u smjeru y osi daje

$$0 = N + G = N + (-mg)$$

pa imamo silu trenja iznosa $f_t = \mu_t N = \mu_t mg$ TRKE nam u ovom slučaju daje:

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_k^2 - \frac{1}{2}mv_p^2 = -f_t \Delta x + F \Delta x \Rightarrow v_k = \sqrt{v_p^2 + \frac{2}{m}(F - f_t) \Delta x}$$

gdje smo uvažili da je sila trenja suprotnog smjera pomaku (kut između sile trenja i pomaka iznosi $\pi \text{ rad}$). Rad sile trenja možemo izračunati na isti način kao i rad vučne sile na početku ovog zadatka:

$$W_t = -f_t \Delta x = -\mu_t mg \Delta x = -0.17(8.0 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(2.0 \text{ m}) = -27 \text{ J}$$

Rad sile trenja je naravno negativan zbog odnosa smjera sile i pomaka. Sada je moguće izračunati brzinu uvrštavanjem zadanih vrijednosti:

$$v_k = \sqrt{(0)^2 + \frac{2}{m} [(16 \text{ N}) - 0.17(8.0 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)] (2.0 \text{ m})} = 1.2 \text{ m/s}$$

Promotrimo sada slučaj kada se zada konačni nagib θ sile povlačenja (kao na slici 3.5) prema podlozi. U ovom slučaju se mijenja više izraza. Kao prvo rad sile povlačenja je $W = F \cos(\theta) \Delta x$. FBD za smjer y osi uz uvjet ravnoteže glasi:

$$0 = \sum F_y = N + F \sin(\theta) - mg \Rightarrow N = mg - F \sin(\theta)$$

ovaj izraz za normalnu silu mijenja i trenje (smanjuje se) tako da nam TRKE obzirom da je početna kinetička energija 0 daje:

$$\frac{K_k}{\Delta x} = -f_t + F \cos(\theta) = -\mu_t(mg - F \sin(\theta)) + F \cos(\theta)$$

Iz ove jednadžbe nije jednostavno odgovoriti koji kut θ konačnoj brzini osigurava maksimalni iznos. Bez obzira na to jednostavno je zaključiti da je kut isti, ako se pitamo koji kut daje maksimalnu konačnu kinetičku energiju K_k jer je ona monotono rastuća funkcija brzine. Jedan od osnovnih teorema diferencijalnoga računa kaže da je nužan

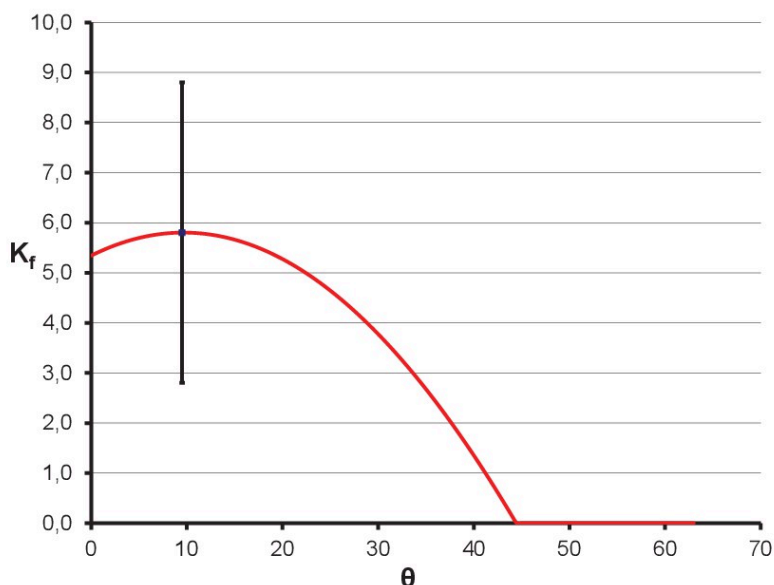
uvjet za ekstrem (minimum ili maksimum) derivabilne funkcije vrijednost prve derivacije 0. Ovaj uvjet možemo iskoristiti tako da stavimo:

$$0 = \frac{dK_k}{d\theta} = (0 - F \cos(\theta))\Delta x - F \sin(\theta)\Delta x$$

gdje smo koristili osnovna pravila deriviranja. Iz prethodnog izraza slijedi:

$$0 = \mu_t \cos(\theta) - \sin(\theta) \Rightarrow \tan(\theta) = \mu_t \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(0.17) = 9.7^\circ$$

Obzirom da tražimo vrijednost u rasponu od 0° do 90° ovo je jedinstveno rješenje jednadžbe, a time i problema. Primijetite kako se niz značajki i rezultata mijenja uvođenjem sile pod općenitim nagibom, a posebno vezano uz izračun sile trenja klizanja. Da se zaista radi o maksimumu možemo se uvjeriti crtanjem grafa što prikazuje slika 3.3. Formalno je moguće dokazati da se radi o maksimumu analitički dodatnim provjerama uvjeta korištenjem teorije ekstrema diferencijalnog računa. ◀



Slika 3.3: Konačna kinetička energija pri povlačenju kutije u ovisnosti o nagibu vučne sile prema smjeru pomaka (kut θ je dan u stupnjevima). Okomita dužina označava maksimum kinetičke energije odnosno brzine koji je određen u zadatku 3.6.

Primjer 3.7 (ZOKG). Ukoliko pretpostavimo savršeno elastičan sraz dva tijela izvedite sljedeću relaciju za odnos brzina prije i poslije sraza:

$$1 = -\frac{v_{ak} - v_{bk}}{v_{ap} - v_{bp}}$$

gdje su $s(a, b)$ označena tijela, a $s(p, k)$ stanje prije i poslije sraza. Ovo je vrijednost koeficijenta uvedenog u (3.4) koju smo već anticipirali u odjeljku 3.2.1.

Rješenje Izraz ćemo izvesti na temelju zakona očuvanja količine gibanja i energije (u ovom slučaju samo kinetičke jer je pretpostavka da se sraz odvija u horizontalnoj ravnini)

$$\begin{aligned} m_a v_{ap} + m_b v_{bp} &= m_a v_{ak} + m_b v_{bk} \\ \frac{1}{2} m_a v_{ap}^2 + \frac{1}{2} m_b v_{bp}^2 &= \frac{1}{2} m_a v_{ak}^2 + \frac{1}{2} m_b v_{bk}^2 \end{aligned}$$

jednostavna algebarska transformacija daje:

$$\begin{aligned} m_a v_{ap} - m_a v_{ak} &= m_b v_{bk} - m_b v_{bp} \\ m_a (v_{ap} - v_{ak}) &= m_b (v_{bk} - v_{bp}) \\ \frac{1}{2} m_a v_{ap}^2 - \frac{1}{2} m_a v_{ak}^2 &= \frac{1}{2} m_b v_{bk}^2 - \frac{1}{2} m_b v_{bp}^2 \\ m_a (v_{ap}^2 - v_{ak}^2) &= m_b (v_{bk}^2 - v_{bp}^2) \\ m_a (v_{ap} - v_{ak})(v_{ap} + v_{ak}) &= m_b (v_{bk} - v_{bp})(v_{bk} + v_{bp}) \end{aligned}$$

Dijeljenjem jednadžbi u 2. i 5. retku dobivamo

$$v_{ap} + v_{ak} = v_{bk} + v_{bp} \Rightarrow v_{ak} - v_{bk} = -(v_{ap} - v_{bp})$$

što izravno daje traženi izraz. ◀

Primjer 3.8 (ZOKG). Pokažite da u izravnom 1D elastičnom srazu dva objekta iste mase od kojih jedan prije sraza miruje dolazi do "prijenosa" brzine (drugi objekt, koji je mirovao, se kreće nakon sraza brzinom prvog, a prvi ostane u mirovanju).

Prema zadatku 3.7 vidljivo je da $e = 1$ odgovara savršeno elastičnom, a $e = 0$ savršeno neelastičnom srazu (tijela se slijepe kao metak i drveni blok u zadatku s balističkim njihalom slika 3.4) pri čemu se dio kinetičke energije transformira u druge oblike (npr termičku - zagrijavanje).

Rješenje ZOKG nam daje u 1D slučaju:

$$\begin{aligned} m v_{ap} + 0 &= m v_{ak} + m v_{bk} \Rightarrow v_{ap} = v_{ak} + v_{bk} \\ v_{ak} - v_{bk} &= -(v_{ap} - 0) \Rightarrow -v_{ap} = v_{ak} - v_{bk} \end{aligned}$$

Ukoliko zbrojimo dvije jednadžbe dobijemo da je $0 = 2v_{ak}$ što nam konačno daje traženi rezultat $v_{ap} = v_{bk}$. ◀

Primjer 3.9 (ZOKG). Odredite brzine nakon elastičnog sraza 2 bloka koji se gibaju na istom pravcu bez promjene smjera. Prvi mase $m_a = 10 \text{ kg}$ se giba 30 m/s , a drugi mase $m_b = 5.0 \text{ kg}$:

1. brzinom 10 m/s ;
2. brzinom -20 m/s ;

Odredite brzine prema uvjetima 1 i 2, ako je sraz elastičan.

Rješenje

$$m_a v_{ap} + m_b v_{bp} = m_a v_{ak} + m_b v_{bk}$$

$$(10 \text{ kg})(30 \text{ m/s}) + (5.0 \text{ kg})(10 \text{ m/s}) = (10 \text{ kg})v_{ak} + (5.0 \text{ kg})v_{bk} \quad \Big/ \times \frac{1}{5.0 \text{ kg}}$$

$$2(30 \text{ m/s}) + (10 \text{ m/s}) = 70 \text{ m/s} = 2v_{ak} + v_{bk}$$

$$v_{ak} - v_{bk} = -(v_{ap} - v_{bp}) \Rightarrow v_{ak} - v_{bk} = -[(30 \text{ m/s}) - (10 \text{ m/s})] = -20 \text{ m/s}$$

što predstavlja sustav dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$2v_{ak} + v_{bk} = 70 \text{ m/s}$$

$$v_{ak} - v_{bk} = -20 \text{ m/s}$$

čijim rješavanjem dobivamo

$$v_{ak} = 16.7 \text{ m/s} \quad v_{bk} = 36.7 \text{ m/s}$$

U slučaju 2 imamo

$$m_a v_{ap} + m_b v_{bp} = m_a v_{ak} + m_b v_{bk}$$

$$2v_{ak} + v_{bk} = 40 \text{ m/s}$$

$$v_{ak} - v_{bk} = -(v_{ap} - v_{bp}) \Rightarrow v_{ak} - v_{bk} = -[(30 \text{ m/s}) - (-20 \text{ m/s})] = -50 \text{ m/s}$$

što predstavlja sustav dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$2v_{ak} + v_{bk} = 40 \text{ m/s}$$

$$v_{ak} - v_{bk} = -50 \text{ m/s}$$

čijim rješavanjem dobivamo

$$v_{ak} = -3.33 \text{ m/s} \quad v_{bk} = 46.7 \text{ m/s}$$

Primjer 3.10 (ZO). Promotrite ulogu koeficijenta restitucije (3.4) i promjene ukupne kinetičke energije u sljedećim situacijama vezanim uz primjer 3.9 na strani 75:

1. Riješite problem 3.9.1, ali sada uzmite da je $e = 0.80$. Odredite udio izgubljene kinetičke energije nakon sraza.
2. Riješite problem 3.9.2 ukoliko je $e = 0.50$. Odredite udio kinetičke energije koji se transformirao u ostale oblike (termička i sl.).

Rješenje Analogno prethodnom postupku uz $e = 0.80$ u 3.9.1 imamo

$$m_a v_{ap} + m_b v_{bp} = m_a v_{ak} + m_b v_{bk}$$

$$2v_{ak} + v_{bk} = 70 \text{ m/s}$$

$$v_{ak} - v_{bk} = -e(v_{ap} - v_{bp}) \Rightarrow v_{ak} - v_{bk} = -0.80 [(30 \text{ m/s}) - (10 \text{ m/s}) = -16 \text{ m/s}]$$

što predstavlja sustav dvije jednačbe s dvije nepoznanice:

$$2v_{ak} + v_{bk} = 70 \text{ m/s}$$

$$v_{ak} - v_{bk} = -16 \text{ m/s}$$

čijim rješavanjem dobivamo

$$v_{ak} = 18.0 \text{ m/s} \quad v_{bk} = 34.0 \text{ m/s}$$

Udio energije transformirane iz kinetičke u druge oblike možemo dobiti određivanjem razlike prije i poslije sraza:

$$\Delta K = K_p - K_k = \frac{1}{2}m_a v_{ap}^2 + \frac{1}{2}m_b v_{bp}^2 - \frac{1}{2}m_a v_{ak}^2 - \frac{1}{2}m_b v_{bk}^2$$

$$\begin{aligned} \Delta K &= \frac{1}{2}(10 \text{ kg})(30 \text{ m/s})^2 + \frac{1}{2}(5.0 \text{ kg})(10 \text{ m/s})^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}(10 \text{ kg})(18.0 \text{ m/s})^2 - (5.0 \text{ kg})(34.0 \text{ m/s})^2 = (4750 \text{ J}) - (4510 \text{ J}) = 240 \text{ J} \end{aligned}$$

Konačno udio "izgubljene" kinetičke energije je

$$\frac{\Delta K}{K_p} = \frac{240 \text{ J}}{4750 \text{ J}} = 0.05$$

U slučaju $e = 0.50$ u 3.9.2:

$$m_a v_{ap} + m_b v_{bp} = m_a v_{ak} + m_b v_{bk}$$

$$2v_{ak} + v_{bk} = 40 \text{ m/s}$$

$$v_{ak} - v_{bk} = -e(v_{ap} - v_{bp}) \Rightarrow v_{ak} - v_{bk} = -0.50 [(30 \text{ m/s}) - (-20 \text{ m/s})] = -25 \text{ m/s}$$

što predstavlja sustav dvije jednačbe s dvije nepoznanice:

$$2v_{ak} + v_{bk} = 40 \text{ m/s}$$

$$v_{ak} - v_{bk} = -25 \text{ m/s}$$

čijim rješavanjem dobivamo

$$v_{ak} = 5.00 \text{ m/s} \quad v_{bk} = 30.0 \text{ m/s}$$

Udio energije transformirane iz kinetičke u druge oblike možemo dobiti određivanjem razlike prije i poslije sraza kao i u prethodnom primjeru:

$$\begin{aligned} \Delta K &= \frac{1}{2}(10 \text{ kg})(30 \text{ m/s})^2 + \frac{1}{2}(5.0 \text{ kg})(20 \text{ m/s})^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}(10 \text{ kg})(5.00 \text{ m/s})^2 - (5.0 \text{ kg})(30.0 \text{ m/s})^2 = (5500 \text{ J}) - (2375 \text{ J}) = 3125 \text{ J} \end{aligned}$$

Konačno udio "izgubljene" kinetičke energije je

$$\frac{\Delta K}{K_p} = \frac{3125 \text{ J}}{5500 \text{ J}} = 0.57$$

što za razliku od vrlo malog udjela u prethodnom primjeru predstavlja više od polovine početne kinetičke energije. Ovaj primjer ukazuje na veliku opasnost kod frontalnih sudara brzih vozila jer se velika količina mehaničke kinetičke energije rasipa tijekom sraza u rad drobljenja struktura i termičku energiju. ◀

Primjer 3.11 (ZO). Loptica privezana za nit se vrti po kružnici polumjera 80 cm ne mijenjajući ukupnu mehaničku energiju. Ukoliko je brzina lopte na vrhu 3.0 m/s, kolika je na dnu? Ravnina kružnice je postavljena okomito na tlo.

Rješenje Ovdje imamo nejednoliko kružno gibanje i ovaj problem nije jednostavno riješiti s pomoću Newtonovih zakona gibanja izravno. Ipak, kako na lopticu djeluju samo konzervativne sile (gravitacija i napetost niti) vrijedi zakon očuvanja mehaničke energije. Napetost niti je okomita na smjer gibanja pa stoga ne obavlja rad i ne "sudjeluje" u zakonu očuvanja energije. Zakon glasi u ovom slučaju da je ukupna mehanička energija ista u svim trenucima tijekom gibanja. Prema tome to vrijedi i za dvije ekstremne pozicije gore g i dolje d :

$$E_u(g) = E_u(d) \Rightarrow K_g + P_g = K_d + P_d \Rightarrow \frac{1}{2}mv_g^2 + mgy_g = \frac{1}{2}mv_d^2 + mgy_d$$

gdje smo s K označili kinetičku, a s P potencijalnu energiju. Slijedi jednostavnim algebarskim preuređenjem:

$$\frac{1}{2}mv_g^2 + mg(y_g - y_d) = \frac{1}{2}mv_d^2 \Rightarrow \frac{2}{m}$$

te konačno imamo:

$$v_d = \sqrt{v_g^2 + 2g(2r)} = \sqrt{(3.0 \text{ m/s})^2 + 4(9.80 \text{ m/s}^2)(0.80 \text{ m})} = 6.4 \text{ m/s}$$

gdje smo iskoristili relaciju promjene visine i polumjera $y_g - y_d = 2r$. ◀

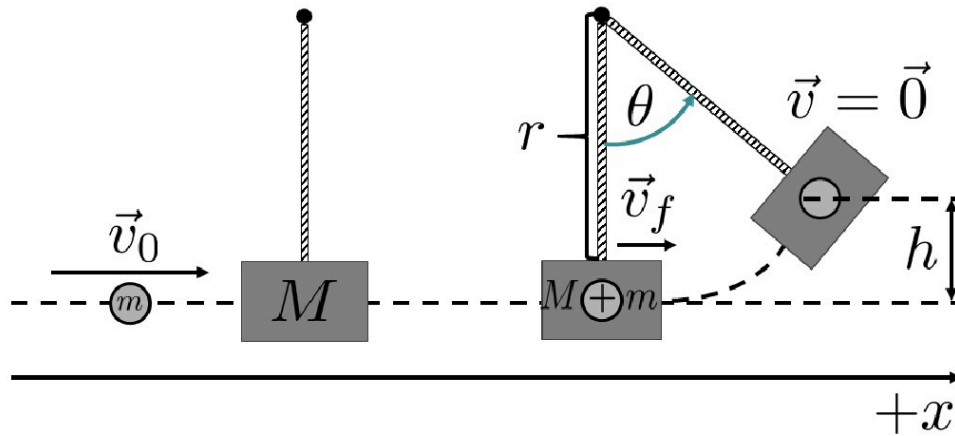
Primjer 3.12 (ZO). Metak mase 17 g je ispaljen u drveni komad mase 1.9 kg koji je obješen na nerastezljivoj niti zanemarive mase i duljine 170 cm te se slobodno može njihati. Odredite brzinu metka ako se zabije u drvo koje se nakon toga otkloni za maksimalni kut 38 stupnjeva (ovaj eksperiment se naziva *balističko njihalo*, vidi sliku 3.4).

Rješenje Ovaj problem možemo promatrati kao proces u dva koraka. Prvi je potpuno neelastični sraz metka m i komada drveta M . U ovom procesu ne znamo što se točno događa s energijom, ali bez obzira na to znamo da vrijedi zakon očuvanja količine gibanja koji uz oznake kao na slici 3.4 glasi:

$$mv_0 + 0 = mv_k + Mv_k = (m + M)v_k \Rightarrow v_0 = \frac{m + M}{m}v_k \quad (3.13)$$

Trenutak poslije sraza složeni sistem metka i komada drveta postaje obično njihalo tako da se predmet otkloni do krajnjeg položaja pri kojem mu je brzina 0. Pri ovom gibanju vrijedi zakon očuvanja mehaničke energije koji za početni položaj i krajnji glasi kao i u zadatku (3.11):

$$\frac{1}{2}(m + M)v_k^2 + (m + M)gy_d = 0 + (m + M)gy_g / (m + M)$$



Slika 3.4: Balističko njihalo. Analiza zakona očuvanja količine gibanja i energije.

gdje smo uzeli u obzir masu složenog tijela ($m + M$) koja se bez obzira na sve pokreti pa dobijemo:

$$v_k^2 = 2g(y_g - y_d) = 2gh = 2g(r - r \cos \theta)$$

gdje je korištena jednostavna geometrijska relacija visine njihaja, kuta otklona i polumjera niti tako da vrijedi:

$$v_k = \sqrt{2gr(1 - \cos \theta)}$$

ovaj rezultat uvrstimo u relaciju (3.13) te imamo konačno:

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{m + M}{m} \sqrt{2gr(1 - \cos \theta)} \\ &= \frac{1.92 \text{ kg}}{0.017 \text{ kg}} \sqrt{2(9.80 \text{ m/s}^2)(1.7 \text{ m})(1 - \cos 38^\circ)} = 300 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Ovaj problem nije lako riješiti izravnom primjenom Newtonovih zakona gibanja, ali ova jednostavna analiza zasnovana na konceptu energije i količine gibanja daje traženi rezultat analizom tri trenutka: prije, tik nakon sraza i na kraju otklona. Pri tome smo mogli potpuno ignorirati kompleksnost gibanja u ostalim trenucima što zorno prikazuje moć pristupa putem zakona očuvanja. ◀

Poglavlje 4

Primjena Newtonovih zakona - gravitacija, tijela, oscilacije i elastičnost

4.1 Opći zakon gravitacije

To je još jedno od sjajnih otkrića fizičara Isaaca Newtona, a predstavlja preciznu matematičku funkciju koja kvantitativno opisuje međudjelovanje masa gravitacijskom silom. U punom vektorskom zapisu ima sljedeći oblik:

$$\vec{F}_g = -G \hat{r}_{12} \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \quad \hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \quad (4.1)$$

\vec{r}_{12} predstavlja vektor koji opisuje razliku u položaju dva tijela (iznos je udaljenost tijela). Ukoliko uzmemo da neko tijelo počne slobodno padati na razini mora možemo 2. Newtonov zakon napisati u kojem smo stavili $a = g$ kao:

$$G \frac{m M_E}{R_E^2} = mg \Rightarrow g = G \frac{M_E}{R_E^2} \quad (4.2)$$

što nam daje izraz za ubrzanje bilo kojeg tijela u slobodnom padu na površini Zemlje. Kada se izračuna ili izmjeri dobiva se poznata vrijednost oko 9.80 m/s^2 . Ovdje odmah napominjemo da gravitacijsko ubrzanje ovisi o nadmorskoj visini te da je ova vrijednost pogodna za eksperimente u razini morske površine tako da ju možemo označiti preciznije s $g(R_E)$ gdje je s R_E označen polumjer Zemlje, a za $g(r)$ smo eksplicitno naveli da je funkcija udaljenosti od težišta Zemlje r . Iz jednadžbe (4.2) je vidljivo da određivanje

konstante gravitacijske sile G predstavlja vaganje Zemlje jer nam je $g(R_E)$ dostupno iz jednostavnih eksperimenata koje je obavio već Galileo Galilei u 17. st.

Primjer 4.1 (G). Međunarodna svemirska postaja radi na visini 350 km iznad površine. Prema planu predviđeno je da cijela postaja na razini mora ima težinu 4.22×10^6 N. Kolika će biti težina postaje u orbiti?

Rješenje Kao prvo odredimo masu postaje na temelju težine u razini mora:

$$m = \frac{F_g}{g} = \frac{4.22 \times 10^6 \text{ N}}{9.80 \text{ m/s}^2} = 4.31 \times 10^5 \text{ kg}$$

Masa je neovisna o mjestu i/ili visini h na kojoj se tijelo nalazi, ali težina (i gravitacijsko ubrzanje $g(h)$) će biti manja u orbiti zbog opadanja gravitacijske sile s povećanjem udaljenosti od središta Zemlje $r = R_E + h$ gdje je $R_E = 6.38 \times 10^6$ m polumjer Zemlje:

$$G \frac{M_E m}{r^2} = m g(h)$$

$$g(h) = \frac{GM_E}{(R_E + h)^2}$$

$$g(350 \text{ km}) = \frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2)(5.98 \times 10^{24} \text{ kg})}{(6.37 \times 10^6 \text{ m} + 0.350 \times 10^6 \text{ m})^2} = 8.83 \text{ m/s}^2$$

Kako je ubrzanje gravitacije na poziciji orbite postaje oko 90% vrijednosti g na razini mora očekujemo da se za isti iznos smanji i težina:

$$m g(350 \text{ km}) = (4.31 \times 10^5 \text{ kg})(8.83 \text{ m/s}^2) = 3.80 \times 10^6 \text{ N}$$

Primjer 4.2 (G). Odredite period gibanja zemljina satelita koji se giba na stalnoj visini 1000 km iznad površine.

Rješenje Centripetalnu silu koja osigurava gibanje satelita na zadanoj kružnoj putanji:

$$G \frac{M_E m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow v^2 = \frac{GM_E}{r}$$

kako se radi o JKG brzina i period kruženja su povezani sljedećom relacijom:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{GM_E}{r}$$

nakon algebarskog preuređenja:

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM_E}{4\pi^2}$$

što predstavlja 3. Keplerov zakon¹ jedan od zakona koje je otkrio Johannes Kepler početkom 17.st. Uz korištenje rezultata (4.2) period gibanja je:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_E} = \frac{4\pi^2 r^3}{gR_E^2} = \frac{4\pi^2 R_E}{g} \left(\frac{R_E + h}{R_E} \right)^3 = \frac{4\pi^2 R_E}{g} \left(1 + \frac{h}{R_E} \right)^3$$

Konačno uvrštavanjem R_E iz 4.1 te $h = 1000 \text{ km} = 10^6 \text{ m}$ dobivamo:

$$T = 105 \text{ min}$$

Primjer 4.3 (G). Satelit u geostacionarnoj orbiti je onaj koji se relativno ne miče iznad neke točke na površini zemlje (primjena za komunikacije i prijenos TV programa). Odredite visinu geostacionarne orbite.

Rješenje Uvjet koji osigurava gibanje satelita u geostacionarnoj orbiti se ostvaruje u slučaju kada period gibanja satelita na putanji oko Zemlje iznosi točno jedan dan. Gibanje modeliramo jednolikim kružnim gibanjem tako da 2. Newtonov zakon glasi:

$$F_G = mg(r) = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow g(r) = \left(\frac{R_E}{r} \right)^2 g(R_E)$$

gdje je R_E polumjer Zemlje uz $g(R_E) = 9.80 \text{ m/s}^2$:

$$v^2 = \left(\frac{2\pi r}{T} \right)^2 = r g(r) \Rightarrow \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = r \frac{R_E^2}{r^2} g(R_E)$$

sada možemo izračunati polumjer geostacionarne orbite:

$$r^3 = \frac{R_E^2 g(R_E) T^2}{4\pi^2}$$

uz $T = 1 \text{ dan} = 8.64 \times 10^4 \text{ s}$ i polumjer Zemlje dan u 4.1:

$$r = 3.59 \times 10^7 \text{ m}$$

što predstavlja traženi polumjer .

¹Vrijedi i za eliptične putanje.

4.2 Vrtanja krutog tijela

Do sada smo pretežno promatrali fenomene tako da smo tijela opisivali gotovo isključivo unutar čestičnog modela, a to predstavlja ozbiljno ograničenje jer postoje nebrojene situacije gdje ne možemo ignorirati činjenicu da je tijelo protežno te se sastoji od velika broja čestica - atoma. *Kruto tijelo* je pojednostavljeni model kojim opisujemo realne sisteme čestica kada možemo zanemariti promjenu volumena i oblika. Postoji veliki broj praktičnih problema koji se vrlo dobro mogu opisati u ovom modelu. Za razumijevanje vrtanje krutog tijela posebno je važno dobro razumjeti općenito kinematiku vrtanje koju smo proučavali posebno u okviru 2D kinematike 2.3.

Primjer 4.4 (G). Kotač se vrti oko fiksne osi stalnim kutnim ubrzanjem 3.50 rad/s^2 s početnom kutnom brzinom ($t=0 \text{ s}$) 2.00 rad/s .

1. Koliki kut prevali kotač tijekom 2.00 s ?
2. Koliko je punih krugova obavio za to vrijeme?
3. Kolika je kutna brzina u $t = 2.00 \text{ s}$?

Rješenje Ovo je osnovni primjer vrtanje krutog tijela oblika valjka oko fiksne osi. Na ovaj slučaj izravno primjenjujemo kinematiku vrlo sličnu formalizmu JKG:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

gdje je θ_0 početni kut ω_0 početna kutna brzina uz kutno ubrzanje zadano u zadatku $\alpha = 3.50 \text{ rad/s}^2$:

$$\theta(t) - \theta_0 = (2.00 \text{ rad/s})(2.00 \text{ s}) + \frac{1}{2}(3.50 \text{ rad/s}^2)(2.00 \text{ s})^2 = 11.0 \text{ rad}$$

Broj punih krugova kotača je prethodni rezultat podijeljen s $2\pi \text{ rad}$ (puni krug u radijanima):

$$\Delta\theta = \frac{11.0 \text{ rad}}{2\pi \text{ rad}} = 1.75 \text{ okreta}$$

Kutnu brzinu kotača dobivamo također izravnim uvrštavanjem u formulu:

$$\omega(2.00 \text{ s}) = \omega_0 + \alpha(2.00 \text{ s}) = (2.00 \text{ rad/s}) + (3.50 \text{ rad/s}^2)(2.00 \text{ s}) = 9.00 \text{ rad/s}$$



4.2.1 Moment inercije

Vrlo važna fizička veličina za efektan opis složenog gibanja tijela se naziva *moment inercije*. Pokazat ćemo da ova veličina ima analognu ulogu za vrtnju kao što masa ima za translacijsko gibanje. Pogledajmo vrtnju sistema kruto povezanih čestica² oko zadane osi. Sve se čestice gibaju *ISTOM* kutnom brzinom ω ! Ukupna kinetička energija uz relaciju $v_p = r_p\omega$ iz (2.12) za svaku česticu je:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 + \dots \\ &= \frac{1}{2}(m_1r_1\omega)^2 + \frac{1}{2}m_2(m_2r_2\omega)^2 + \frac{1}{2}m_3(m_3r_3\omega)^2 + \dots \\ &= \frac{1}{2}(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + \dots)\omega^2 \end{aligned}$$

gdje smo u zagradi izlučili sumu koja ovisi samo o osi vrtnje i raspodjeli mase u prostoru. Ovo nas upućuje da uvedemo fizičku veličinu koju ćemo nazvati *moment inercije sistema čestica* te uvodimo općenitu definiciju obzirom na zadanu os vrtnje:

$$I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + \dots = \sum_i m_i r_i^2 \quad (4.3)$$

tako da korištenjem ove definicije kinetička energija za vrtnju oko zadane osi poprima sugestivan oblik:

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (4.4)$$

Ovaj oblik je formalno isti kao i kinetička energija (3.8) pri gibanju materijalne čestice $\frac{1}{2}mv^2$ ukoliko moment inercije za vrtnju igra ulogu mase za translacijsko gibanje i isto tako kutna brzina za običnu brzinu. Ovakve analogije će se pojaviti u nizu izraza za općenito gibanje tijela u što ćemo se uvjeriti kasnije.

Primjer 4.5 (G). Promotrite molekulu kisika (O_2) kao sistem dvije čestice mase $2.66 \times 10^{-26} \text{ kg}$ koje su na sobnoj temperaturi udaljene $d = 1.21 \times 10^{-10} \text{ m}$. Molekula se vrti oko osi koja je okomita na spojnu dužinu između atoma kisika i prolazi kroz CM.

1. Odredite moment inercije oko osi vrtnje.
2. Ako je kutna brzina $4.60 \times 10^{12} \text{ rad/s}$ odredite kinetičku energiju vrtnje.

²Svako kruto tijelo možemo tako promatrati, jednostavno ga razdijelimo u mašti na veliki broj dovoljno sitnih dijelova.

Rješenje Ovo je primjer vrtnje krutog tijela koji se sastoji od dva tijela i izravna primjena (4.3) u ovom slučaju daje:

$$I = m \left(-\frac{d}{2} \right)^2 + m \left(\frac{d}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} m d^2 \\ = \frac{1}{2} (2.66 \times 10^{-26} \text{ kg}) (1.21 \times 10^{-10} \text{ m})^2 = 1.95 \times 10^{-46} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Izravna primjena (4.4) nam daje:

$$K_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} (1.95 \times 10^{-46} \text{ kg} \cdot \text{m}^2) (4.60 \times 10^{12} \text{ rad/s})^2 = 2.06 \times 10^{-21} \text{ J}$$

Moment inercije možemo odrediti za bilo koje tijelo korištenjem izraza (4.3), a za slučaj kada ne razlučujemo čestice od kojih se tijelo sastoji (na makro razini tako promatramo gotovo sva tijela) možemo ga u mislima rastaviti na veliki broj malih dijelova te na njih primijeniti navedenu definiciju. Što je veći broj dijelova vjernije opisujemo geometriju tijela, a to je osnovna ideja integralnog računa koji omogućava da se ovaj postupak provede matematički egzaktno. Primjer tako određenog momenta inercije u slučaju valjka (rezultat se često koristi u inženjerstvu) za vrtnju oko osi kroz centar mase okomitu na bazu je:

$$I_{cm} = \frac{1}{2} M r^2 \quad (4.5)$$

Važan teorem za izračun momenta inercije se naziva teorem o paralelnim osima, a glasi

$$I(d) = I_{cm} + M d^2 \quad (4.6)$$

gdje je d označena udaljenost paralelne od osi kroz centar mase (odjeljak 4.3) za koju nam je moment inercije poznat. Kao primjer izračunajmo moment inercije za vrtnju štapa oko paralelne osi kroz krajnju točku:

$$I_{cm} = \frac{1}{12} M L^2 \quad I(L/2) = I_{cm} + M \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} M L^2 \quad (4.7)$$

4.3 Centar mase

Tijelo na koje ne djeluju vanjske sile (bez vanjskih ograničenja) se pri slobodnoj vrtnji okreće oko posebne točke koju nazivamo *centar mase* (CM). Ta točka u prostoru miruje dok se ostali dijelovi tijela gibaju oko nje. Za početak bez dokaza iznosimo jednostavan rezultat koji nam omogućava određivanje položaja centra mase za sistem bilo kojeg broja čestica³:

$$\vec{R}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i \quad M = \sum_i m_i \quad (4.8)$$

Koristeći ovu definiciju i elementarne značajke operacija množenja i zbrajanja brojeva i vektora možemo navedeni izraz pregrupirati po volji. Zamislimo da imamo tijelo koje se sastoji iz dva tijela kojima znamo položaj CM. Koristeći gornju definiciju lako je izraz u ovom slučaju preurediti tako da izravno izračunamo CM složenog tijela. Rastavimo izraz (4.8) na dva dijela koji odgovaraju pojedinim tijelima, a zatim iskoristimo poznavanje centra mase za ta tijela:

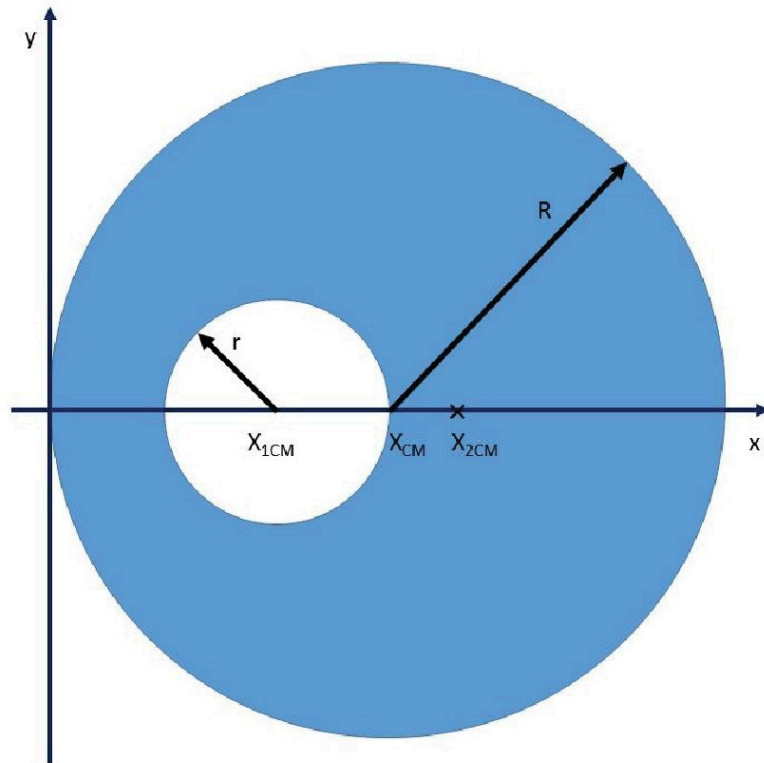
$$\begin{aligned} \vec{R}_{cm} &= \frac{1}{M} \left(\sum_{1i} m_i \vec{r}_i + \sum_{2i} m_i \vec{r}_i \right) = \frac{1}{M} (M_1 \vec{R}_{1cm} + M_2 \vec{R}_{2cm}) = \\ & \frac{M_1}{M} \vec{R}_{1cm} + \frac{M_2}{M} \vec{R}_{2cm} \quad (4.9) \end{aligned}$$

Ovaj rezultat nema ograničenje podjele na dva tijela već ga je jednostavno poopćiti na veći broj dijelova što se može koristiti prema okolnostima konkretnog problema.

Primjer 4.6 (Centar mase šupljeg diska). Promotrite uniformni disk polumjera $R=2.00$ m s rupom kružnog oblika polumjera $r=R/3$ m smještenoj tako da se središte diska nalazi na rubu izreza (vidi sliku 4.1). Ukoliko je načinjen homogeno od materijala odredite centar mase.

Rješenje Postavimo sustav tako da je x -os na pravcu koji prolazi kroz os diska kao na slici 4.1. Iz simetrije raspodjele mase jasno je da se CM nalazi na x osi. Ovo je primjer problema gdje možemo koristiti tehniku nadopunjavanja odnosno aditivnost izraza za CM (4.9). Ukoliko nema rupe položaj CM je upravo R na x osi. Položaj CM izreza je

³Iako ovaj izraz nalikuje izrazu za moment inercije primijetite da je CM, za razliku momenta inercije, vektorska veličina koja se mjeri u jedinicama za duljinu!



Slika 4.1: Određivanje CM homogenog diska s kružnim izrezom van osi simetrije.

$r = 2R/3$. Nepoznat je položaj CM diska s izrezom X_{2CM} . U ovom slučaju izraz (4.9) ima sljedeći oblik:

$$MX_{CM} = \sum_i m_i x_i = \sum_i^1 m_i x_i + \sum_i^2 m_i x_i = m_1 X_{1CM} + (M - m_1) X_{2CM}$$

odnosno:

$$X_{2CM} = \frac{MX_{CM} - m_1 X_{1CM}}{M - m_1} = \frac{X_{CM} - \frac{m_1}{M} X_{1CM}}{1 - \frac{m_1}{M}}$$

Preostaje odrediti omjere masa za što se može primijeniti tehnika jednostavnog razmjera iz matematike koja u ovom slučaju daje:

$$\frac{m_1}{M} = \frac{\sigma \pi r^2}{\sigma \pi R^2} = \frac{r^2}{R^2}$$

gdje je površinska gustoća označena sa σ , a ona je obični broj jer su ploče homogene. Uvrštavanjem vrijednosti za polumjere dobivamo $m_1/M = 1/9$ (vidi sliku 4.1). Ovaj

rezultat možemo uvrstiti u izraz za položaj CM:

$$X_{2CM} = \frac{R - \frac{1}{9} \frac{2R}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{25}{24} R = 2.08 m$$

4.3.1 Centar mase i potencijalna energija

Uveli smo i već više puta koristili rezultat koji opisuje potencijalnu energiju materijalne točke u gravitacijskom polju $P = mgy$. Postavlja se pitanje što se događa s ukupnom potencijalnom energijom općenitog sistema čestica kada mijenja položaj u vanjskom polju gravitacijske sile. Promotrimo za početak općeniti izraz gdje se koristimo činjenicom da je potencijalna energija aditivna fizička veličina:

$$P = \sum_k m_k g y_k = g \sum_k m_k y_k = g \left(\sum_k m_k \right) \frac{\sum_k m_k y_k}{\sum_k m_k} = g M \frac{\sum_k m_k y_k}{M}$$

gdje smo s M označili ukupnu masu sistema čestica. Razlomak u izrazu s desne strane predstavlja upravo y-komponentu CM y_{cm} . Konačno možemo napisati vrlo praktičan i važan rezultat:

$$P = M g y_{cm} \quad (4.10)$$

koji ćemo često koristiti u rješavanju problema gibanja tijela u gravitacijskom polju. Pretpostavka koju smo ovdje prešutno koristili je neovisnost ubrzanja g o položaju y_k čestica. To znači da nam gornji rezultat vrijedi za računanje promjene potencijalne energije ukoliko se pri tome mogu zanemariti promjena g s promjenom y .

4.4 Zakoni gibanja

4.4.1 Gibanje CM

Promotrimo što se događa ukoliko na složeno kruto tijelo koje se sastoji iz proizvoljno velika broja dijelova djeluje određeni broj vanjskih sila. 2. Newtonov zakon za svaku

česticu ima sljedeći oblik:

$$\vec{F}_{u,i} + \vec{F}_{v,i} = m_i \vec{a}_i$$

gdje smo s u označili unutrašnju, a s v vanjsku silu na česticu i . Ako zbrojimo ove izraze za sve čestice dobijemo:

$$\left(\sum_i \vec{F}_{u,i} \right) + \left(\sum_i \vec{F}_{v,i} \right) = \sum_i m_i \vec{a}_i$$

Sada možemo iskoristiti 3. Newtonov zakon koji osigurava da je ukupni zbroj svih unutrašnjih sila $\vec{0}$ pa dobijemo sljedeći izraz gdje desnu stranu pomnožili i podjelili s ukupnom masom $M = \sum_i m_i$:

$$\sum_i \vec{F}_{v,i} = \vec{F}_v = \sum_i m_i \vec{a}_i = M \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{M}$$

Razlomak s desne strane je izraz koji je izravno povezan s (4.8) definicijom vektora položaja CM. Korištenje osnovnih pravila deriviranja za određivanje brzine i ubrzanja nam daje sljedeće izraze za brzinu i ubrzanje CM za općenito tijelo:

$$\vec{v}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{M} \quad \vec{a}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{M}$$

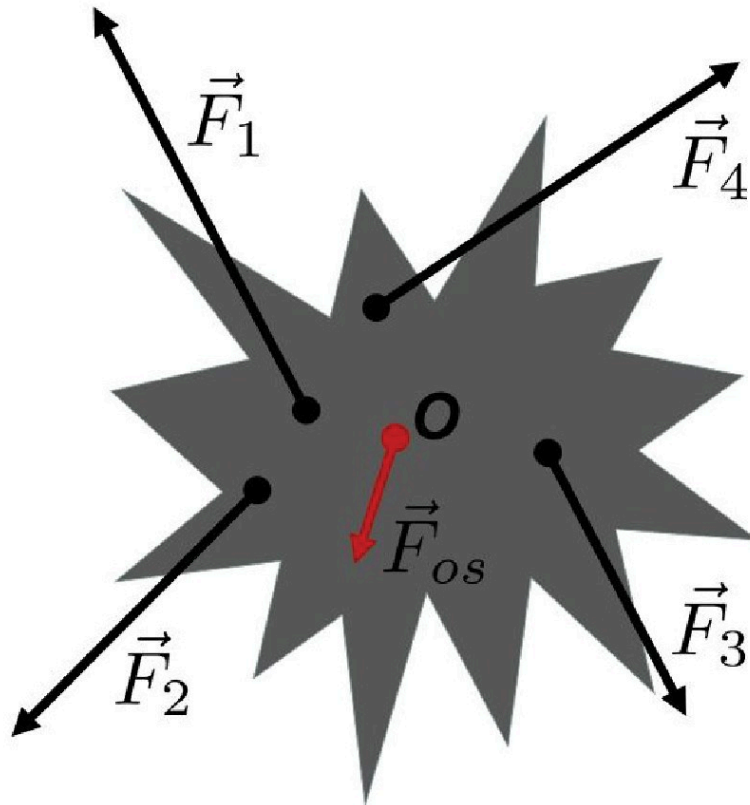
koje možemo uvrstiti u jednadžbu gibanja za sistem čestica te dobivamo vrlo važnu jednadžbu koja opisuje gibanje CM za bilo koji sistem čestica (uključujući i kruta tijela):

$$\vec{F}_v = M \vec{a}_{cm} \quad (4.11)$$

koji ima matematički oblik istovjetan originalnom obliku 2. Newtonova zakona za pojedinu česticu. Fizički smisao ovog rezultata je da se CM nekog tijela giba kao čestica mase M čiji položaj odgovara položaju CM tijela pod utjecajem sile \vec{F}_v koja je vektorski zbroj svih VANJSKIH sila na sistem. Posebno je važno primijetiti da ovaj rezultat vrijedi za sve sisteme čestica, bez obzira na njihov broj i složenost sila koje djeluju na njih (vanjskih i unutrašnjih).

4.4.2 Moment sile

Prije eksplicitnog razmatranja zakona gibanja pri vrtnji tijela nužno je uvesti osnovnu fizičku veličinu koja je uzrok promjene kutne brzine, baš kao što je sila kod obične brzine



Slika 4.2: Sile djeluju ukupnim momentom sile na tijelo koje se slobodno može vrtjeti oko točke O koja je nepomična.

u skladu s 2. Newtonovim zakonom (2.14). Nazvat ćemo ju *moment sile* i definiramo ju s pomoću vektorskog množenja kraka sile \vec{r} i sile \vec{F} :

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (4.12)$$

Vektorsko množenje je definirano tako da je gornji vektor okomit na ravninu zadanu vektorom položaja i sile, a iznos mu je dan s:

$$|\vec{\tau}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = r F_t \quad (4.13)$$

gdje je F_t iznos projekcije vektora sile \vec{F} na okomicu prema vektoru kraka sile \vec{r} . Ako je sila okomita na krak imamo za iznos jednostavno $\tau = r F$. S ovom fizičkom veličinom se izravno susrećemo kod otvaranja vrata, korištenju alata poput ključa za vijke i matice, kliješta ili škara. Ovu veličinu je jednostavno proučiti kod otvaranja vrata (posebno

teških). Vrata su tijelo koje se može nakon otvaranja vrtjeti oko fiksne osi. Razmislite, koji je najefikasniji način da vrata iz mirovanja stavite u vrtnju obzirom na mjesto gdje ih rukom gurate: što bliže osi vrtnje ili što dalje? Ako vrata guramo vrlo blizu osi vrtnje možemo se uvjeriti da i vrata male mase nije lako pomicati. Ovo upućuje da se s povećanjem kraka sile povećava efikasnost promjene kutne brzine. Uz to ukoliko silom djelujemo na rub vrata u smjeru osi vrtnje također smo neefikasni. U ovom slučaju su sila i krak paralelni te je $F_t = 0$.

Ako na neko tijelo koje se može vrtjeti oko fiksne osi djeluje više sila kao na slici 4.2 (točke u tijelu na samoj osi se ne mogu gibati) vrijedi da je ukupna sila na tijelo nul vektor. Ipak ono ne mora biti u ravnoteži na vrtnju i na njega općenito može djelovati ukupni vanjski moment sile:

$$\vec{\tau}_v = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 + \dots$$

U sumi smo isпустили moment sile reakcije osovine \vec{F}_{os} jer joj je hvatište u osi, krak sile je $r = 0$ tako da je i pripadni moment sile nul vektor (vidi sliku 4.2). Ovakva situacija je vrlo česta u strojevima (npr ležajevi, osovine i sl.) i pokazuje da je dinamika moguća i kada ukupna sila na protežno tijelo iščezava.

4.4.3 Dinamika vrtnje

Sada možemo iskazati temeljni rezultat dinamike krutog tijela. Moment sile uzrokuje kutno ubrzanje, a to znači da će se tijelo prikazano na slici 4.2 vrtjeti tako da će mu s vremenom kutna brzina biti sve veća i veća. Osnovni rezultat iskazuje sljedeća relacija:

$$\vec{\tau}_v = I \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} \quad (4.14)$$

koji vrijedi ukoliko se moment inercije ne mijenja tijekom vrtnje⁴ i predstavlja Newtonov drugi zakon za vrtnju.

Pokazuj se da je korisno definirati analognu veličinu količini gibanja za vrtnju *moment količine gibanja*:

$$\vec{L} = I \vec{\omega} \quad (4.15)$$

⁴Na isti način kao i 2. Newtonov zakon za translacijsko gibanje (vrijedi $F = ma$, ako se masa ne mijenja).

uz koju se može pokazati da nam daje općenitu varijantu 2. Newtonov zakona za vrtnju (bez ograničenja na stalan moment inercije):

$$\vec{\tau}_v = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} \tag{4.16}$$

Tablica 4.1: Analogija vrtnje i translacijskog gibanja.

Vrtnja		Translacija	
moment sile	$\vec{\tau}_v$	sila	\vec{F}_v
moment inercije	I	masa	m
moment količine gibanja	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$	količina gibanja	$\vec{p} = m\vec{v}$
kutno ubrzanje	$\alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$	ubrzanje	$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$
2.zakon	$\tau_v = I\alpha$	2.zakon	$F = ma$

4.4.4 Zakoni očuvanja i vrtnja

Jednadžba (4.4) je prvi rezultat koji smo dobili vezan uz vrtnju krutog tijela i energije, ovdje kinetičke energije vrtnje.

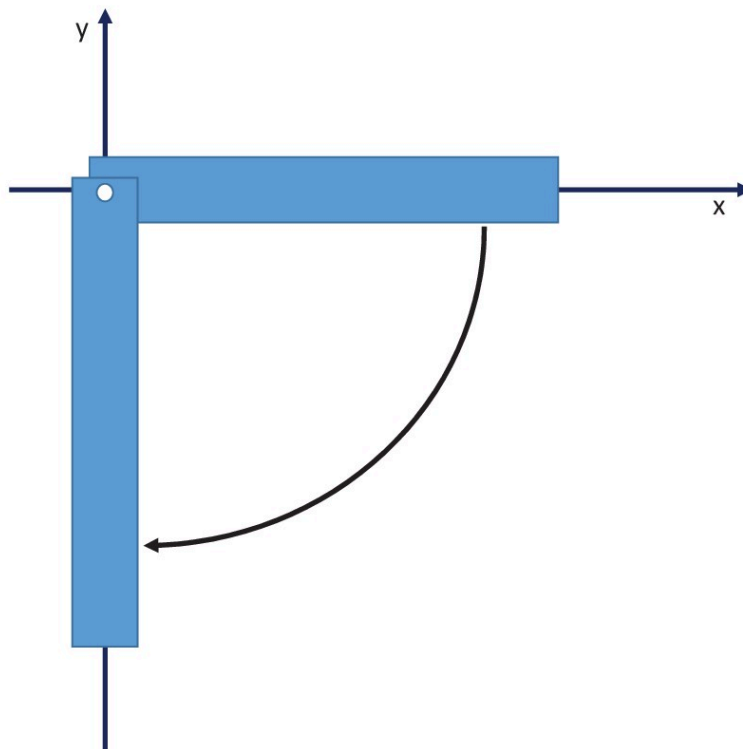
Primjer 4.7 (G). Štap duljine 1.0 m i mase 200 g je obješen za osovinu oko koje se može kružno gibati praktično bez trenja. Ako je štap postavljen horizontalno (prema gravitacijskoj sili), a zatim pušten da se zavrti oko osovine (kao na slici 4.3) u okomitoj ravnini odredite brzinu vrha štapa kada mu je položaj vertikaln?

Rješenje Ovaj problem vrtnje krutog tijela oko čvrste osi možemo riješiti izravnom primjenom izraza za potencijalnu energiju tijela (4.10), ZSE (4.10) iz cjeline 3.3.3 koji u ovom slučaju ima oblik:

$$K_p + P_p = \frac{1}{2}I\omega_p^2 + Mgy_p = K_k + P_k = \frac{1}{2}I\omega_k^2 + Mgy_k$$

Uvjeti zadatka su $\omega_p = 0$, $y_p = 0$. CM štapa se usmjeru y-osi pomakne za iznos $y_k = -L/2$ gdje je s L označena duljina štapa. Uvrštavanjem ovih vrijednosti i (4.7) za I dobivamo željenu jednadžbu:

$$0 = \frac{1}{2}I\omega_p^2 + Mgy_p = K_k + P_k = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}ML^2 \right) \omega_k^2 + Mg(-L/2)$$



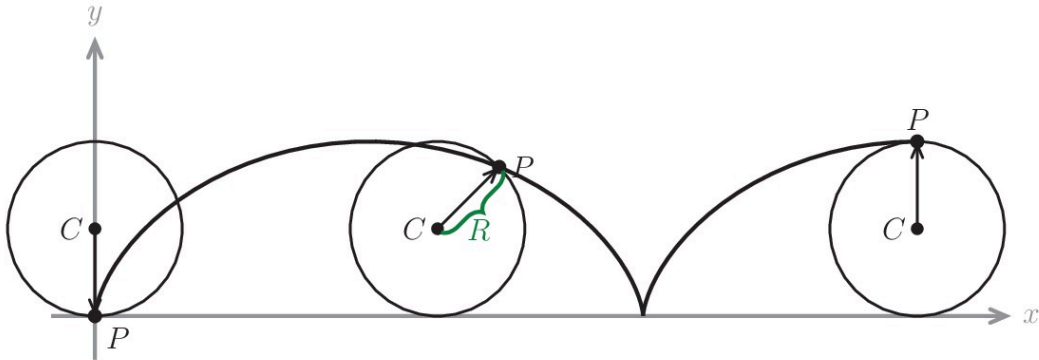
Slika 4.3: Vrtanja štapa oko čvrste osi za 90 stupnjeva.

iz koje konačno dobivamo:

$$\omega_k = \sqrt{\frac{3g}{L}} \Rightarrow v_{vrh} = L\omega_k = \sqrt{3gL} = 5.4 \text{ m/s}$$

4.4.5 Kotrljanje

Kotrljanje bez proklizavanja je gibanje kod kojeg tijelo oblika valjka vrši složeno gibanje koje se sastoji od vrtanje oko osi simetrije uz translacijsko gibanje same osi (CM je na toj osi) kao što je prikazano na slici 4.4. Prateći karakterističnu točku na obodu valjka P možemo steći uvid u složenost gibanja pojedinih dijelova valjka. Kada promatramo kotrljanje bez proklizavanja kvantitativno najvažnije je uspostaviti relaciju pomaka CM i kuta vrtanje ili odgovarajućih brzina. S pomoću slike slici 4.4 to zapravo nije teško jer za



Slika 4.4: Valjak tijekom vodoravnog kotrljanja za cijeli okret i pol. Pratimo gibanje točke P na obodu kruga.

pomak CM vrijedi:

$$\Delta x_{cm} = R\Delta\theta \Rightarrow \frac{\Delta x_{cm}}{\Delta t} = R\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

gdje je s Δx_{cm} označen pomak centra mase, a s $\Delta\theta$ kut koji prebriše polumjer u vrtnji tijekom pomaka CM. Kada izraz podijelimo s proteklom vremenom dobivamo vrlo važnu relaciju:

$$v_{cm} = R\omega \quad (4.17)$$

koja predstavlja geometrijsko *ograničenje kotrljanja* i daje nam ključnu kvantitativnu vezu linearne translacijske i kutne brzine pri ovakvom gibanju.

Da bismo opisali gibanje bilo koje točke na valjku pri ovakvu kotrljanju korisno ga je promotriti iz dva sustava. Prvi (LAB) vezan uz podlogu u kojem gibanje izgleda točno kao na slici 4.4 i drugog (ROT) u kojem CM valjka miruje. U ovom drugom gibanje je jednostavno vrtnja oko čvrste osi. Ukoliko iskoristimo relaciju (2.9a) možemo za bilo koju točku napisati da je njena brzina promatrana iz LAB sustava povezana s brzinom u ROT sustavu sljedećim izrazom:

$$\vec{v}_{i,LAB} = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{i,ROT}$$

dakle gibanje bilo kojeg djelića valjka možemo rastaviti u dvije komponente: brzinu i gibanje CM cijelog tijela plus relativno prema CM $\vec{v}_{i,ROT}$ koja predstavlja vrtnju kao da translacije nema. Jedna od važnih posljedica gornjeg izraza je da je, promatrano iz LAB sustava, točka dodira na valjku i podloge ima brzinu 0 jer se CM giba desno brzinom $v_{cm} = R\omega$, a točka dodira u odnosu na CM brzinom $v_p = -R\omega$ sve, naravno, u

horizontalnom smjeru. Ovo razmatranje smo proveli samo zato da potvrdimo samu suštinu uvjeta *bez proklizavanja* koji znači upravo da se valjak na dodiru ne giba relativno prema podlozi. Istim postupkom možemo se uvjeriti da se točka na vrhu valjka giba brzinom $v_p = 2R\omega = 2v_{cm}$ paralelno i u istom smjeru kao i CM.

Primjer 4.8 (G). Valjak se spušta niz kosinu s visine 1.20 m bez proklizavanja. Kolika je translacijska brzina centra mase valjka na dnu kosine?

Rješenje Problem uključuje složeno gibanje tijela kao u Yo-Yo primjeru 4.9, a to znači da moramo uzeti u obzir: translaciju, vrtnju i vanjsku gravitacijsku silu. Obzirom da na kosini gravitacijska sila utječe na gibanje znatno složenije od primjera 4.9 ovdje ćemo krenuti drukčijim pristupom. Upotrijebiti ćemo izraz za potencijalnu energiju tijela (4.10) te ZSE iz cjeline 3.3.3 koji u ovom slučaju ima oblik (3.11) kao u primjeru (4.7), uz uključenje translacije:

$$K_p + P_p = \frac{1}{2}Mv_{cm,p}^2 + \frac{1}{2}I\omega_p^2 + Mgy_p = K_k + P_k = \frac{1}{2}Mv_{cm,k}^2 + \frac{1}{2}I\omega_k^2 + Mgy_k$$

i predstavlja ukupnu energiju koja se ne mijenja tijekom gibanja. Uvrštavanjem vrijednosti za moment inercije valjka (4.5):

$$Mg(y_p - y_k) = Mg \Delta y = \frac{1}{2}Mv_{cm,k}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}Mr^2 \right) \left(\frac{v_{cm,k}}{r} \right)^2 \times \frac{4}{3M}$$

gdje smo uvrstili $\Delta y = y_p - y_k$, $v_p = 0 \text{ m/s}$ te vezu obodne brzine pri kotrljanju valjka bez proklizavanja i kutne brzine $v_{cm} = r\omega$ koja je izravna posljedica veze kod kružnog gibanja (2.12). Nakon sređivanja dobivamo:

$$\frac{4}{3}g \Delta y = v_{cm,k}^2 \Rightarrow v_{cm,k} = \sqrt{\frac{4}{3}(9.80 \text{ m/s}^2)(1.2 \text{ m})} = 3.96 \text{ m/s}$$

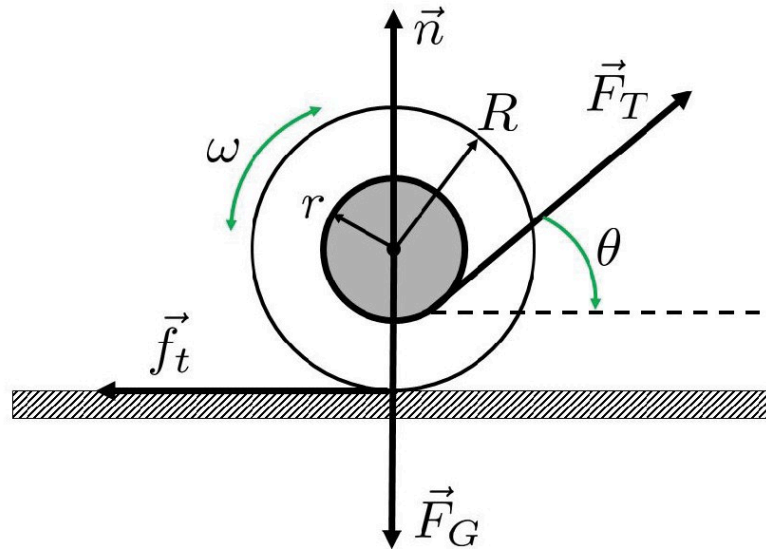
Primijetimo da bi u slučaju klizanja bez trenja imali samo translacijsko gibanje konačnom brzinom nešto većom od prethodne:

$$v_{cm,k}^2 = 2g \Delta y$$

jer se u ovom slučaju promjena potencijalne energije ne dijeli između vrtnje i translacije. ◀

Primjer 4.9 (Yo-Yo i gibanje). Promotrite Yo-Yo većeg polumjera R i manjeg r koji je postavljen na ravnu horizontalnu površinu (vidi sliku 4.5). Nit namotana na unutarnji

bubanj polumjera r povlači se vanjskom silom pod određenim kutom θ . U kojem smjeru se giba centar mase (CM), ako znamo da se središte giba jednoliko, a kotrljanje je bez proklizavanja.



Slika 4.5: Yo-Yo FBD s geometrijskim značajkama.

Rješenje Postavimo sustav tako da je x -os na pravcu koji prolazi kroz centar mase i paralelna je s podlogom kao na slici koja prikazuje FBD na slici 4.5. Obzirom da se Yo-Yo giba i vrti jednoliko pod zadanim uvjetima znamo da vrijede uvjeti dinamičke mehaničke ravnoteže. Za gibanje centra mase vrijedi:

$$\vec{0} = \vec{F}_T + \vec{f}_t + \vec{n} + \vec{F}_G$$

gdje je \vec{F}_T napetost niti, \vec{f}_t sila trenja, \vec{n} normalna sila i \vec{F}_G gravitacijska sila. Gornji vektorski izraz možemo zapisati u odabranom koordinatnom sustavu prema komponentama:

$$x \text{ os: } 0 = F_T \cos(\theta) - f_t$$

$$y \text{ os: } 0 = n - F_G$$

i za vrtnju:

$$\vec{0} = \vec{r} \times \vec{F}_{tension} + \vec{R} \times \vec{F}_{friction}$$

što možemo zapisati u koordinatnom sustavu s pomoću, jedine netrivialne, komponente z osi

$$z \text{ os: } 0 = r F_T - R f_t$$

S pomoću ove relacije možemo eliminirati f_t iz relacije za gibanje CM u smjeru osi x:

$$x \text{ os: } 0 = F_T \cos(\theta) - \frac{r}{R} F_T = \left(\cos(\theta) - \frac{r}{R}\right) F_T$$

Vidimo da jednakost vrijedi ako je $\cos(\theta_c) = \frac{r}{R}$ i to je upravo granični slučaj pri kojem gibanje Yo-Yoa mijenja smjer ukoliko se vrijednost kuta mijenja od kuta nešto manjeg od θ_c do nešto većeg. Odavde možemo zaključiti da predznak ubrzanja ovisi o samo o kutu θ i geometriji na način da ukoliko imamo $\cos(\theta) > \frac{r}{R}$ brzina se povećava u desno (pozitivni smjer osi x) i lijevo ukoliko je $\cos(\theta) < \frac{r}{R}$.

U ovom slučaju nam je pojednostavljena analiza slučaja jednolikoga gibanja bila dovoljna da bismo dali odgovor na postavljeno pitanje. Kompletan opis s kvantitativno određenim ubrzanjima je znatno složeniji i uključuje nelinearno ponašanje trenja koje povećanjem iznosa F_T dodatno prelazi iz statičkog u trenje klizanja. ◀

Primjer 4.10 (G). Diesel motor razvija 90 kW snage pri 2000 okr/min. Koliki moment sile se razvija u tom slučaju na osovini?

Ako motor prenosi svoju snagu putem zupčanika polumjera 23 cm i ako dva zuba istodobno sudjeluju podjednako u prijenosu sile na drugi zupčanik, odredite kontaktnu silu na dodiru zubaca.

Rješenje Kutna brzina u ovom slučaju izražena u *rad/s* iznosi:

$$\omega = (2000 \text{ okr/min}) \frac{2\pi \text{ rad/okr}}{60 \text{ s/min}} = 209 \text{ rad/s}$$

prema tome je ukupni moment sile:

$$\tau = \frac{P}{\omega} = \frac{9 \times 10^4 \text{ W}}{209 \text{ rad/s}} = 431 \text{ Nm}$$

Kako je $\tau = rF$ ukupna sila je:

$$F = \frac{\tau}{r} = \frac{431 \text{ Nm}}{0.23 \text{ m}} = 1872 \text{ N}$$

i kako zupčanici s dodirnom površinom dva zuba sila po svakom iznosi $F_z = F/2 = 936 \text{ N}$. ◀

Primjer 4.11 (G). Dva diska (20 i 40 kg m^2), jedan iznad drugog, se slobodno vrte oko iste osi bez trenja u suprotnom smjeru različitim kutnim brzinama (30 i -25 rad/s). Os je postavljena okomito na tlo i u jednom trenutku se gornji oslobodi i pusti da padne na donji. Zbog trenja površina koje su u dodiru diskovi se slijepe.

1. Dokažite da u ovom sustavu vrijedi zakon očuvanja ukupnog momenta količine gibanja.
2. Odredite kutnu brzinu sistema nakon što se diskovi potpuno slijepe.

Rješenje Vanjske sile (gravitacija i normalna sila nemaju moment sile oko osi vrtnje) ne doprinose momentu sile oko zadane osi vrtnje tako da je jedini moment sile na diskove posljedica sile trenja između ploha diskova nakon što se slijepe. Prema trećem Newtonovu zakonu sile na diskove su istog iznosa, ali suprotnog predznaka

$$\tau_{AB} = -\tau_{BA} \Rightarrow \Delta(I_B\omega_B) = \Delta t \tau_{AB} = -\Delta t \tau_{BA} = \Delta(I_A\omega_A)$$

odavde dobivamo da je:

$$0 = \Delta(I_A\omega_A) + \Delta(I_B\omega_B) = \Delta L_A + \Delta L_B$$

što znači da je ukupni moment količine gibanja stalan:

$$L_{tot} = konst = L_A + L_B = (I_A\omega_A) + (I_B\omega_B)$$

Dokazana relacija se izravno može iskoristiti u ovom slučaju jer ukupni moment količine gibanja prije i poslije sljepljivanja isti:

$$(I_A\omega_A) + (I_B\omega_B) = (I_A + I_B)\omega_k \Rightarrow \omega_k = \frac{(I_A\omega_A) + (I_B\omega_B)}{I_A + I_B}$$

gdje smo iskoristili aditivnosti momenta inercije koji je nakon spajanja jednostavno zbroj pojedinih za svaki disk. Uvrštavanjem vrijednosti fizičkih veličina dobivamo konačni rezultat:

$$\omega_k = \frac{(20 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(30 \text{ rad/s}) + (40 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(-25 \text{ rad/s})}{(20 \text{ kg} \cdot \text{m}^2) + (40 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)} = -6.67 \text{ rad/s}$$

Primjer 4.12 (G). Klizač se vrti 1.0 okr/s tako da je pri vrtnji njegov moment inercije 2.4 kg m^2 . U odabranom trenutku privuče ruke uz tijelo i smanji moment inercije na 1.2 kg m^2 . Kolika je nova kutna brzina?

Koliki je rad obavljen pri mijenjanju momenta inercije?

Rješenje Za određivanje kutne brzine možemo iskoristiti zakon očuvanja momenta količine gibanja:

$$I_p \omega_p = I_k \omega_k \Rightarrow \omega_k = \frac{I_p}{I_k} \omega_p = \left(\frac{2.4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}{1.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} \right) (1 \text{ okr/s}) = 2 \text{ okr/s}$$

Ovdje je vanjski moment sile na klizača zanemariv, jer za gravitacijsku i normalnu silu moment sile iščezava oko osi vrtnje, a moment sile trenja između klizaljke i leda je zanemariv zbog malog kraka i vrlo niskog koeficijenta trenja led/čelik. Rad obavljen u svrhu promjene momenta inercije je prema TRKE za kruto tijelo jednak promjeni kinetičke energije koja prema izrazu u zadatku ima iznos:

$$\begin{aligned} W_v = \Delta K &= \frac{1}{2} I_k \omega_k^2 - \frac{1}{2} I_p \omega_p^2 = \frac{1}{2} (I_k \omega_k) \omega_k - \frac{1}{2} (I_p \omega_p) \omega_p = \frac{1}{2} L (\omega_k - \omega_p) \\ &= \frac{1}{2} (2.4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2) (2\pi \text{ rad/s}) [(4\pi \text{ rad/s}) - (2\pi \text{ rad/s})] = 47 \text{ J} \end{aligned}$$

gdje smo kutnu brzinu iskazali u odgovarajućim mjernim jedinicama rad/s što je obavezno da bi rezultat iskazali u J . W_v je rad koji obavi klizač. ◀

4.5 Ravnoteža, elastičnost i struktura tvari

Dva izvedena oblika Newtonovih zakona (4.11) i (4.14) primijenjeni na kruto tijelo u slučaju mirovanja prelaze u poseban oblik u kojem su sva ubrzanja nula. Prema tome rješavanje problema važne grane inženjerstva koji nazivamo statika uključuje dvije vektorske jednadžbe za ukupnu vanjsku silu te vanjski moment sile:

$$\vec{0} = \vec{F}_{ext} \quad \vec{0} = \vec{\Gamma}_{ext} \quad (4.18)$$

gdje je s Γ_{ext} dan moment sile⁵ koje potpuno određuju rješenje u ovom graničnom slučaju. Ipak vektorske jednadžbe su zapravo sustavi vezanih jednadžbi tako da u složenim situacijama problem može postati tehnički vrlo zahtjevan.

Prvi oblik deformiranja dobijemo kada predmet učvrstimo na jednom kraju, a drugi izložimo vanjskom opterećenju izraženom silom \vec{F} . Proces istežanja prestaje kada se unutrašnje sile koje se opiru produljenju izjednače s vanjskom. Jednoosno naprezanje definiramo omjerom vanjske sile i površine na koju djeluje. Pri vrlo malim promjenama duljine veza između bezdimenzionalnog produljenja $\epsilon = \Delta L/L$ je linearna i opisana Hookovim zakonom kao i u slučaju elastične opruge. Youngov modul je mjera elastičnosti pri jednoosnoj promjeni duljine pri istežanju, a definira se kao omjer:

$$E = \frac{F/A}{\Delta L/L} = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{\text{naprezanje}}{\text{deformacija}} \quad (4.19)$$

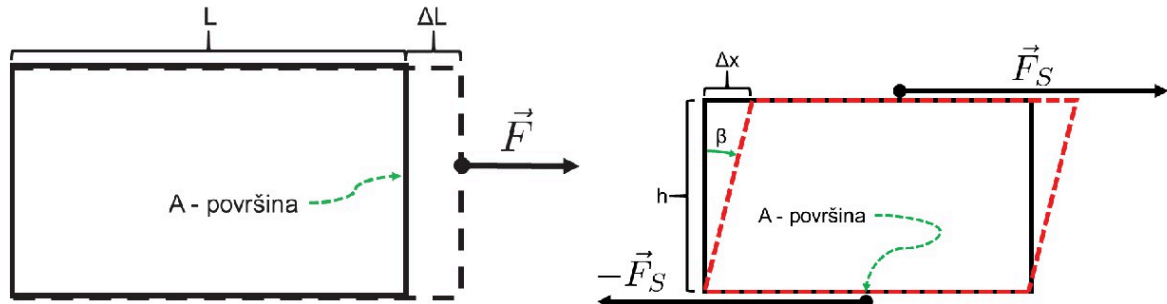
uz oznake kao na slici 4.6 lijevo.

Drugi tip deformacije nastaje kada na jednu stranicu djeluje sila paralelno s površinom, a suprotna stranica kvadra je fiksirana drugom silom istog iznosa, ali suprotnog smjera. Ovakvo naprezanje se naziva *posmično*. Modul smicanja za elastičnost oblika se definira sljedećim izrazom:

$$G = \frac{F_S/A}{\Delta x/h} = \frac{F_S/A}{\tan \beta} = \frac{\text{posmično naprezanje}}{\text{posmična deformacija}} \quad (4.20)$$

uz oznake kao na slici 4.6 desno. Kod metala i legura obično je kut β vrlo mali pa se obično koristi sljedeća formula $\tan \beta \simeq \beta$ gdje je kut izražen u radijanima. Da

⁵Ovdje mijenjamo dosadašnju oznaku za moment sile τ jer se u području elastičnosti materijala ona koristi za posmično naprezanje. Ovo je česta pojava u fizici da istu fizičku veličinu označavamo različito u različitim područjima. Ona je doslovno uzrokovana nedostatkom odgovarajućih znakova.



Slika 4.6: Dva osnovna tipa odnosa naprezanje/deformacija: istežanje (lijevo) i smicanje (desno).

bismo se uvjerali u preciznost ovog pristupa usporedimo tangens i kut u radijanima za $\beta = 1^\circ = \pi/180 \text{ rad}$. Izračun pokazuje da je relativna preciznost:

$$\left| \frac{\beta - \tan \beta}{\beta} \right| = 1.0 \times 10^{-4}$$

dakle pogreška za male kutove $|\beta| < 1^\circ$ iznosi manje od 0.01%.

Vlačna čvrstoća (UTS od *ultimate tensile strength*) pri jednoosnom istežanju se definira kao omjer:

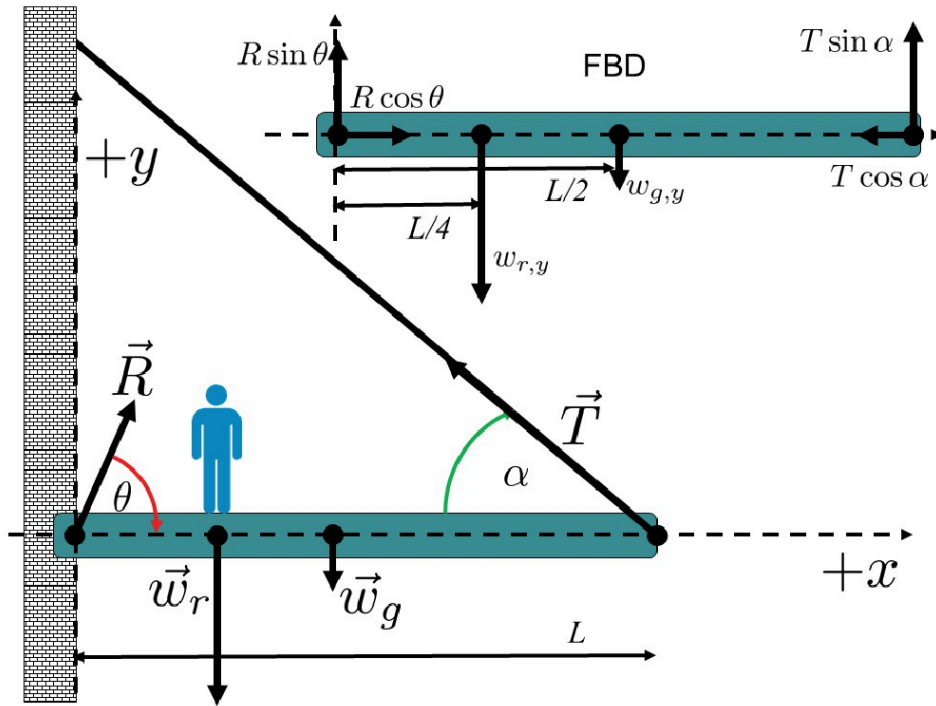
$$R_m = \frac{F_m}{A_0} \quad (4.21)$$

gdje je F_m maksimalna sila naprezanja tijekom standardnog vlačnog eksperimenta (jednoosno istežanje), a A_0 površina presjeka prije naprezanja.

Treći oblik naprezanja se dobije kada na tijelo u mehaničkoj ravnoteži djeluju sile tako da su okomite na sve plohe tijela. Ovakva raspodjela sile na tijelo nastaje pri uranjanju tijela u bilo koji fluid. U ovom slučaju dolazi isključivo do promjene volumena, bez promjene oblika. Volumno naprezanje definiramo kao omjer okomite komponente sile i površine, a u ovom slučaju se naziva *tlak*. Pripadna deformacija je omjer promjene i početnog volumena $\Delta V/V_0$. Kao i u prethodnim primjerima za vrlo male deformacije vrijedi Hookeov zakon s pripadajućim modulom elastičnosti. Volumni modul (BM od *bulk modulus*) pri tlačenju se definira kao omjer:

$$B = -\frac{p}{\Delta V/V_0} \quad (4.22)$$

gdje je p tlak, a V_0 volumen prije naprezanja. Recipročna vrijednost volumnog modula se naziva stlačivost $K = 1/B$.



Slika 4.7: Greda s teretom ovješena čeličnim užetom sa zadanim kutom. Gore desno je i prikaz dijagrama slobodnog tijela u komponentama (FBD).

Elastičnost pri torzijskoj deformaciji opisujemo Hookovim zakonom u obliku:

$$\Gamma_b = -\kappa \theta \tag{4.23}$$

gdje je s Γ_b dan moment sile štapa koji je odgovor materijala na vanjsko opterećenje torzijom. Torzijska konstanta pri odgovarajućem opterećenju štapa oblika valjka:

$$\kappa = \pi \frac{G r^4}{2L} \tag{4.24}$$

gdje je S modul smicanja, r polumjer presjeka, a L duljina štapa.

Nekoliko zadataka će u dijelu predstaviti i primjenu tehnika konverzije mjernih jedinica koje upravo u području materijala pokazuje veliku raznolikost obzirom na konkretnu zemlju i pravnu legislativu vezanu s mjeriteljstvo. Ovdje se napominje da je rad s mjernim jedinicama bez teškoća jedna od najvažnijih kompetencija inženjerske profesije.

Primjer 4.13 (S). Homogena horizontalna greda duljine 8.00 m, težine 200 N je pričvršćena za zid klinom. Ako je kraj grede suprotno od zida dodatno povezan sa zidom

kablom pod kutem 53.0° kao na slici 4.7. Uzmite da osoba težine 600 N stoji na 2.00 m od zida, odredite napetost kabla i vektor sile kojom zid djeluje na gredu. Što se događa s napetošću kabla i silom reakcije zida na gredu ukoliko se osoba dodatno udalji od zida prema drugom kraju?

Rješenje Promotrimo ovaj problem tako da procijenimo što bi se desilo ukoliko osoba krene polako od zida do zadane pozicije na gredi. Očekujemo da će napetost u čeličnom užetu rast obzirom da se povećava krak pa prema tome i moment sile na gredu. Prvi korak kao i obično je popis svih sila koje djeluju na gredu te postavljanje uvjeta statičke ravnoteže (4.18), a prikazan je na slici 4.7 desno. Ukoliko postavimo ishodište 2D koordinatnog sustava na mjesto klina koji povezuje gredu i zid primjenom prvog uvjeta statičke ravnoteže u komponentama možemo pisati:

$$0 = \sum F_x = R \cos(\theta) - T \cos(\alpha)$$

$$0 = \sum F_y = R \sin(\theta) + T \sin(\alpha) - w_{r,y} - w_{g,y}$$

uz $L = 8.00\text{ m}$, $\alpha = 53.0^\circ$, $w_r = 600\text{ N}$ i $w_g = 200\text{ N}$. Kako su u ovom sustavu nepoznanice R , T i θ ovaj sustav ima beskonačno puno rješenja dok realna situacija dozvoljava postojanje samo jednog. Dodatni uvjet ravnoteže, onaj za vrtnju, nam osigurava dodatnu jednadžbu i on, zbog pogodnog izbora osi oko koje ćemo računati momente sile (okomito na ravninu kroz ishodište 2D sustava), ima osobito jednostavan oblik:

$$0 = \sum \Gamma_z = LT \sin(\alpha) - (L/4)w_{r,y} - (L/2)w_{g,y}$$

$$0 = \sum \Gamma_z = (8.00\text{ m})T \sin(53.0^\circ) - (2.00\text{ m})(600\text{ N}) - (4.00\text{ m})(200\text{ N})$$

jer je razvezana od prethodne dvije te nam omogućava izravno određivanje napetosti $T = 313\text{ N}$. Uvrštavanje ove vrijednosti u prve dvije jednadžbe daje sljedeći sustav:

$$188\text{ N} = R \cos(\theta)$$

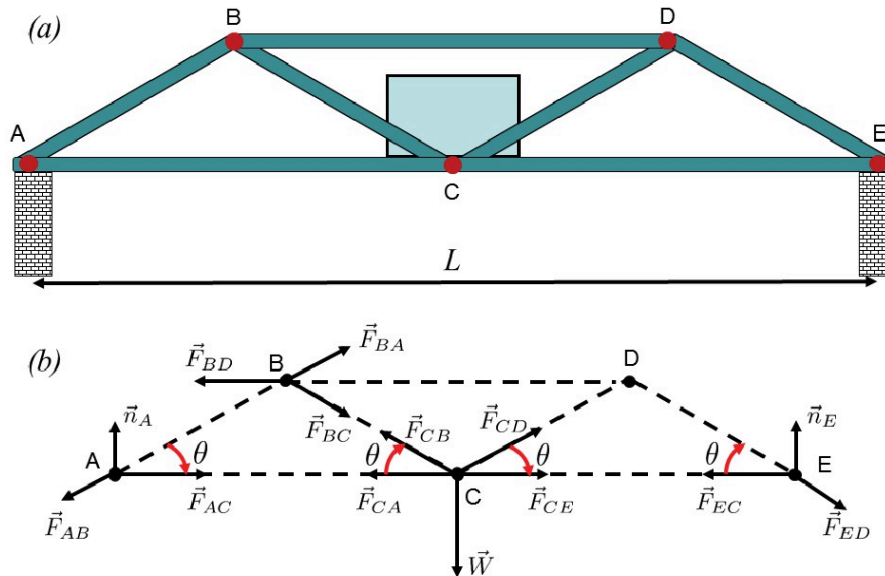
$$550\text{ N} = R \sin(\theta)$$

odakle dijeljenjem dobivamo kut:

$$\tan(\theta) = \frac{550\text{ N}}{188\text{ N}} = 2.93 \Rightarrow \theta = 71.1^\circ$$

Ostaje nam odrediti iznos reakcije zida na gredu:

$$R = \frac{188\text{ N}}{\cos(71.1^\circ)} = 580\text{ N}$$



Slika 4.8: (a) Rešetkasti nosač - primjer konstrukcijskog rješenja za mostove. (b) FBD sile koje djeluju na mjestima spoja greda.

Primjer 4.14 (S). Krovovi, mostovi i druge strukture moraju biti i čvrste i lagane tako da se često izrađuju kao rešetkasti nosači slični prikazanoj na slici 4.8. Zamislite da prikazana struktura predstavlja dio mosta. Pretpostavljamo da su strukturne komponente spojene klinovima u svakom zglobu. Također pretpostavljamo da je cijela struktura slobodna na horizontalni pomak jer je samo oslonjena na dva nosača. Oni omogućuju pomicanje natrag i naprijed da se ne stvara naprezanje uslijed toplinskog širenja i stezanja. Pretpostavljamo da je masa konstrukcije mosta zanemariva u usporedbi s teretom. U ovoj situaciji, sila svakog od štapova (kosnici) na klinove u šarkama je vlačna ili tlačna usmjerena njegovom duljinom. Izračunajmo silu u svakom štapu kada je na most postavljen teret težine $7\,200\text{ N}$ u središtu. Račun ćemo obaviti promatrajući sile koje djeluju na klinove.

Rješenje U ovom primjeru ćemo uvesti drukčije značenje uobičajene notacije za silu tako da će nam oznaka \vec{F}_{AB} označavati silu kojom greda AB djeluje na klin u točki A i na isti način za sve označene točke na slici 4.8a gdje smo ujedno prikazali i FBD 4.8b uz $\theta = 30^\circ$ i $W = 7200\text{ N}$. Za početak ćemo iskoristiti uvjet ravnoteže cijele strukture u

vertikalnom smjeru koji glasi:

$$0 = \sum F_y = n_A + n_E - mg \Rightarrow 7200 \text{ N} = n_A + n_B$$

zatim postavljamo uvjet ravnoteže na vrtnju oko osi kroz točku A :

$$0 = \sum \Gamma = Ln_E - (L/s)(mg) \Rightarrow n_E = \frac{mg}{2} = 3600 \text{ N}$$

gdje smo uvažili širinu strukture mosta $L = 50 \text{ m}$. Račun možemo ponoviti za os oko točke E , ali je iz zrcalne simetrije strukture jasno da je također $n_A = \frac{mg}{2} = 3600 \text{ N}$.

Sada ćemo analizirati vertikalni smjer sile u točki A pri čemu ćemo pretpostaviti da je greda AB sabijena⁶ pa prema tome je y -komponenta te sile u A negativna. Uvjet je:

$$0 = \sum F_y = n_A - F_{AB} \sin(30^\circ) \Rightarrow F_{AB} = 7200 \text{ N}$$

čime je ujedno potvrđena pretpostavka o sabijenom stanju ove grede.

Sada ćemo odrediti napetost grede F_{AC} uvjetom ravnoteže u također u točki A gdje ćemo pretpostaviti da je ona u stanju istezanja te je sila u smjeru desno kao i na FBD-u (slika 4.8b):

$$0 = \sum F_x = F_{AC} - F_{AB} \cos(30^\circ) \Rightarrow F_{AC} = 6200 \text{ N}$$

Kao i u slučaju ukupne ravnoteže u vertikalnom smjeru na osnovu zrcalne simetrije pretpostavljamo $F_{CB} = F_{CD}$ i $F_{CA} = F_{CE}$ što znatno ubrzava izračun⁷ tako u točki C (pretpostavljamo da je CB u stanju istezanja)

$$0 = \sum F_y = 2F_{CB} \sin(30^\circ) - (7200 \text{ N}) \Rightarrow F_{CB} = 7200 \text{ N}$$

Konačno možemo postaviti uvjet za ravnotežu u točki B horizontalno:

$$0 = \sum F_x = F_{BA} \cos(30^\circ) + F_{BC} \cos(30^\circ) - F_{BD} \\ \Rightarrow F_{BD} = 2(7200 \text{ N}) \cos(30^\circ) = 12000 \text{ N}$$

tako da je opterećenje najveće u gornjoj gredi BD za koju treba predvidjeti najjaču izvedbu u materijalu i obliku. Napominjem da ovo nije jedini način kako se može riješiti ovaj problem no možda je najjednostavniji. Čitatelja ne treba zabrinjavati ukoliko isti riješi drukčijim izborom točaka i redoslijedom izračuna. ◀

⁶Ukoliko to nije točno već je ta greda istegnuta u ovoj strukturi dobit ćemo negativni rezultat za iznos sile koji će dalje biti točan tako da u ovom trenutku zapravo ne trebamo brinuti o konačnom rezultatu.

⁷Mogli bismo računati i bez pomoći simetrije te bismo dobili isti rezultat uz znatno složeniji izračun.

Primjer 4.15 (E). Bakrena žica kružnog presjeka duljine 3.0 m i promjera 4.0 mm ima Youngov modul $E = 1.18 \times 10^{11}$ Pa i elastičnu granicu materijala pri naprezanju 1.58×10^8 Pa.

1. Odredite elastičnu konstantu k , ako žicu shvatimo kao elastičnu oprugu.
2. Koliku je napetost potrebno izazvati u žici da ju produljimo za 1.50 mm?
3. Da li ova sila premašuje navedenu elastičnu granicu ove žice?

Rješenje Ovaj zadatak se rješava izravnim uvrštavanjem u formule i definicije pojedinih fizičkih veličina.

1. Krenemo od definicije Youngova modula (slika 4.6 lijevo):

$$E = \frac{F/A}{\Delta L/L} \Rightarrow F = \frac{EA}{L} \Delta L$$

pa usporedbom $F = kx$ dobivamo $k = \frac{EA}{L}$ uz $x = \Delta L$. Površina kružnog presjeka je:

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3.14 (4.0 \times 10^{-3} \text{ m})^2}{4} = 1.26 \times 10^{-5} \text{ m}^2$$

Uvrštavanjem dobivamo:

$$k = \frac{(1.18 \times 10^{11} \text{ Pa})(1.26 \times 10^{-5} \text{ m}^2)}{3.0 \text{ m}} = 4.96 \times 10^5 \text{ N/m}$$

2. Označimo napetost u štapu s T . Kako je za linearni elastični slučaj $T = kx$ izravnim uvrštavanjem dobivamo:

$$T = (4.96 \times 10^5 \text{ N/m})(1.50 \times 10^{-3} \text{ m}) = 743 \text{ N}$$

3. Iz prethodnog dijela zadatka:

$$\sigma = \frac{T}{A} = \frac{743 \text{ N}}{1.26 \times 10^{-5} \text{ m}^2} = 5.9 \times 10^7 \text{ Pa}$$

pa prema tome dobiveno naprezanje ima vrijednost znatno nižu od elastične granice.

Primjer 4.16 (E). Kolika je sila potrebna da se probuši rupa promjera 1.3 cm u čeličnoj ploči debljine 3.2 mm , ako je posmična čvrstoća na smicanje materijala $2.8 \times 10^8\text{ N/m}^2$? Izrazite silu i u lbf⁸, ako je $1\text{ lbf} = 4.45\text{ N}$?

Rješenje Posmičnom naprezanju je izložen plašt valjka kojem je baza rupa, a visina odgovara debljini lima. Sila koja posmično napreže lim je uzrokovana momentom sile kojim svrdlo za bušenje djeluje na kružnu površinu lima koju zahvaća. Površina koju promatramo iznosi:

$$A = \pi d h = \pi (1.3 \times 10^{-2}\text{ m})(3.2 \times 10^{-3}\text{ m}) = 1.3 \times 10^{-4}\text{ m}^2$$

Kako je minimalno posmično naprezanje za kidanje čelika:

$$\left(\frac{F}{A}\right)_{min} = 2.8 \times 10^8\text{ N/m}^2$$

u slučaju bušenja rupe potrebno je osigurati sila:

$$\begin{aligned} F > \left(\frac{F}{A}\right)_{min} A &= (2.8 \times 10^8\text{ N/m}^2)(1.3 \times 10^{-4}\text{ m}^2) \\ &= 3.6 \times 10^4\text{ N} = 3.6 \times 10^4\text{ N} \frac{1\text{ lbf}}{4.45\text{ N}} = 8.1 \times 10^4\text{ lbf} \end{aligned}$$

Primjer 4.17 (E). U mnoštvu problema koji uključuju dizajniranje struktura je potrebno odrediti geometrijske značajke da bi se zadovoljili zahtjevi za mehaničko naprezanje tijekom primjene. Pretpostavimo da želimo koristiti čelični štap za nošenje tereta težine 10000 lbf . Odredite minimalan promjer potreban da izdrži teret ako je UTS (vlačna čvrstoća) za čelik 1200 MPa .

Rješenje UTS R_m i sila F_m (ovdje težina tereta) iz izraza (4.21) nam daju uvjet za minimalnu površinu presjeka. Nejednakost dobijemo tako da nametnemo ograničenje na opterećenje čeličnog štapa:

$$F_m < R_m A_0 = R_m \frac{\pi d^2}{4}$$

⁸lbf označava *pound-force* mjernu jedinicu za silu koju često koriste inženjeri u anglo-saksonskim državama (npr u *English Engineering units* sistemu).

Algebarskim preuređenjem možemo dobiti za promjer štapa (uz sigurnosni faktor 1/2, obzirom da čelik nije skup, za kritično opterećenje uzmimo $1200 \text{ MPa}/2 = 600 \text{ MPa}$) sljedeću nejednakost:

$$d = \sqrt{\frac{4A_0}{\pi}} > \sqrt{\frac{4F_m}{\pi R_m}} = \left[\frac{4 \times 10^4 \text{ lbf}}{\pi (600 \times 10^6 \text{ N/m}^2) \times \left(1.450 \times 10^{-4} \frac{\text{lbf/in}^2}{\text{N/m}^2}\right)} \right]^{\frac{1}{2}} = 0.38 \text{ in}$$

U praktičnoj primjeni ne postoji ova dimenzija, ali je uobičajena vrijednost $3/8 \text{ in} = 0.375 \text{ in}$ zadovoljavajuća obzirom na visoki sigurnosni faktor koji smo koristili pri ocjeni.

U izračunu smo iskoristili konverzijski faktor $\text{N/m}^2 \rightarrow \text{lbf/in}^2$ koji smo odredili standardnim postupkom:

$$1 \text{ N/m}^2 = \frac{1 \text{ N}}{(1 \text{ m})^2} = \frac{0.2248 \text{ lbf}}{(39.37 \text{ in})^2} = 1.450 \times 10^{-4} \text{ lbf/in}^2$$

Primjer 4.18 (E). Recipročna vrijednost volumnog modula se naziva kompresibilnost $k=1/B$. Neka je $B = 2.3 \times 10^9 \text{ Pa}$.

1. Odredite kompresibilnost vode u $1/\text{atm}$ ako je atm jedinica atmosferskog tlaka na razini oceana i iznosi $1 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$.
2. Koliki je tlak, izražen u atm jedinici, potreban da se određeni volumen vode smanji za 0.1 %?

Rješenje Problem rješavamo izravnim uvrštavanjem:

1. Konverzija mjernih jedinica se obavlja standardnim postupkom (broj jedan napišemo kao omjer iznosa u različitim mjernim jedinicama):

$$B = 2.3 \times 10^9 \text{ Pa} \frac{1 \text{ atm}}{1.013 \times 10^5 \text{ Pa}} = 2.27 \times 10^4 \text{ atm}$$

pa je kompresibilnost $k = 1/B = 4.4 \times 10^{-5} \text{ atm}^{-1}$

2. Polazimo od (4.22) te imamo:

$$p = -B \frac{\Delta V}{V_0} = -(2.27 \times 10^4 \text{ atm}) \times (-0.001) = 23 \text{ atm}$$

Ovaj primjer zorno prikazuje značajku vode da je i za veliki iznos tlakova praktično nestlačiva što se često koristi u praksi pri proračunima.

Primjer 4.19 (E). Dvije paralelne sile istog iznosa 6 kN i suprotnog smjera posmično deformiraju metalni blok u obliku kocke s bridom 40 cm. Kut smicanja je izmjeren i iznosi 0.00036° .

1. Odredite posmično naprezanje i deformaciju.
2. Koliko bi iznosio kut smicanja, ako je brid kocke 120 cm?

Rješenje U ovom primjeru kutija se nalazi u statičkoj ravnoteži pa imamo kao i na slici 4.6 desno:

1. Izravno iz definicije posmičnog naprezanja τ :

$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{6.0 \text{ kN}}{(0.40 \text{ m})^2} = 37.5 \text{ kPa}$$

dok je posmična deformacija:

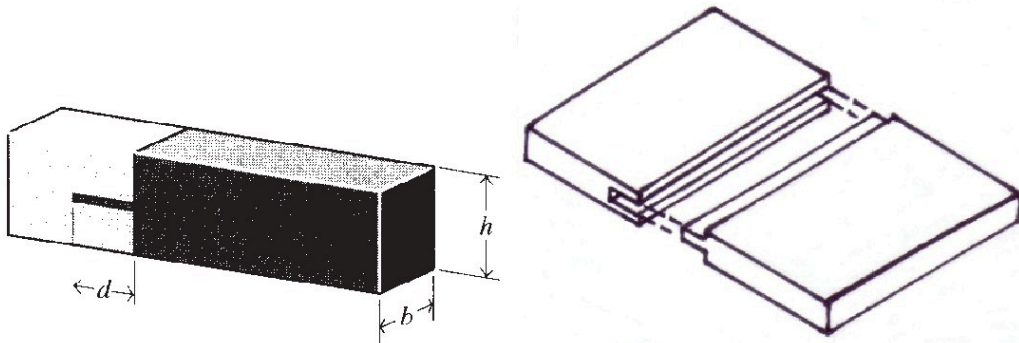
$$\beta = 3.6 \times 10^{-4} \frac{\pi \text{ rad}}{180} = 6.28 \times 10^{-6}$$

Modul smicanja iznosi $G = (37.5 \text{ kPa}) / (6.28 \times 10^{-6}) = 6.0 \text{ GPa}$

2. Ako sila ostaje ista, a površina se poveća $9\times$ (brid je povećan $3\times$), zbog toga što S ostaje isti posmična deformacija se isto toliko smanji $\beta' = \beta/9 = 4.0 \times 10^{-5}$ stupnjeva.

Primjer 4.20 (E). Čelična osovina motora ima promjer 5.0 cm i duljinu 3.0 m. Čelik od kojeg je napravljena ima modul smicanja 84 GPa.

1. Odredite torzijsku konstantu osovine.



Slika 4.9: Čest tip spoja drvenih komada lijepljenjem jezičac-utor postupkom.

2. Ukoliko se jedan kraj učvrsti, koliki moment sile uzrokuje torziju 22° ?

Rješenje Izravnom primjenom izraza za torzijsku konstantu (4.24):

$$\kappa = \pi \frac{(8.4 \times 10^{10} \text{ Pa})(0.025 \text{ m})^4}{2(3.0 \text{ m})} = 1.72 \times 10^4 \text{ Nm}$$

Korištenjem (4.23) možemo izravno odrediti vanjski moment sile Γ koji je upravo $\Gamma = -\Gamma_b$ zbog 3. N. z. pa imamo:

$$\Gamma = \kappa \theta = (1.72 \times 10^4 \text{ Nm})(22^\circ \pi/180^\circ) = 6.6 \times 10^3 \text{ Nm}$$

Primjer 4.21 (E). Dva drvena kvadra spajamo ljepilom kao na slici 4.9 jezičac-utor tehnika. Ukoliko je spojeni komad učvršćen nepomično na jednom kraju, a na drugom je opterećen vlačno silom F procijenite potrebnu dubinu utora da spojeni komad ima čvrstoću drveta kao da nije lijepljen iz dva komada te ga izrazite u metrima. Rezultat uz oznake kao na slici 4.9 ($h = 2 \text{ in}$) izrazite s pomoću vlačne čvrstoće za suho drvo hrasta ($\sigma_k = 7800 \text{ lbf/in}^2$) i čvrstoće smicanja lijepljena spoja ($\tau_c = 1000 \text{ lbf/in}^2$ približne vrijednosti).

Rješenje Opterećenje vanjskom vlačnom silom F vrši posmično naprezanje na površinama jezičac-utor spoja oblika pravokutnika $b \times d$ tako da je posmično naprezanje (oznake kao na slici 4.9) na pojedinoj površini dano s:

$$\tau = \frac{F/2}{bd}$$

gdje smo uzeli da je crni dio nepomičan, a poteže se sivi. Dakle, površina sloja ljepljiva uz crni drveni komad je nepomična, a uz sivi se povlači svaka sa silom $F/2$. Ovdje je naprezanje smicanjem izložen tanki sloj ljepljiva koji prati oblik spoja.

Sila nakon kojeg drveni predmet ovog oblika puca pri jednoosnom vlačnom opterećenju je $F_k = bh\sigma_k$ gdje smo sa σ_k označili kritično naprezanje za drvo. Uvjet da se lijepljeni predmet ponaša kao puno drvo je da kritična sila F_k ima isti iznos pri smicanju kao i pri jednoosnom opterećenju:

$$\begin{aligned} F_k = bh\sigma_k = 2bd\tau_c \Rightarrow d &= h \frac{\sigma_k}{2\tau_c} = (2 \text{ in}) \frac{7800 \text{ lbf/in}^2}{2 \times 1000 \text{ lbf/in}^2} \\ &= 7.8 (2.54 \times 10^{-2} \text{ m}) = 0.20 \text{ m} \end{aligned}$$

Primijetite da nam tijekom računa nije potrebno obavljati konverziju mjernih jedinica zadanih fizičkih veličina osim u posljednjem koraku inči/metri. Ovo se postiže pažljivom organizacijom izračuna algebarskih izraza tako da se pojavljuje što više bezdimenzijskih članova. ◀

Poglavlje 5

Titranje i valovi

"When young Galileo, then a student at Pisa, noticed one day during divine service a chandelier swinging backwards and forwards, and convinced himself, by counting his pulse, that the duration of the oscillations was independent of the arc through which it moved, who could know that this discovery would eventually put it in our power, by means of the pendulum, to attain an accuracy in the measurement of time till then deemed impossible, and would enable the storm-tossed seaman in the most distant oceans to determine in what degree of longitude he was sailing?"

- Hermann von Helmholtz, s David Cahanom (1995). "Science and Culture: Popular and Philosophical Essays", p.93, University of Chicago Press

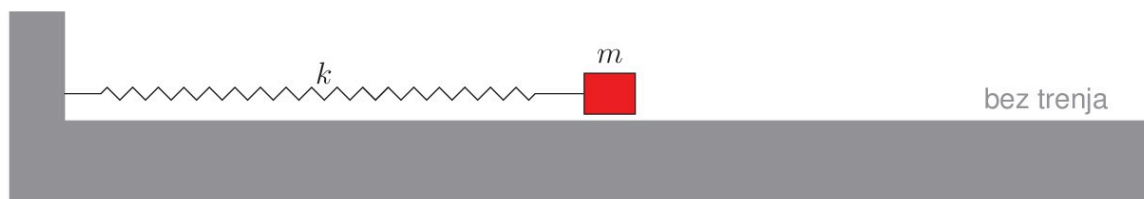
5.1 Titranje

Sustavi tijela čije je gibanje prostorno ograničeno i ponavljajuće tijekom vremena oko ravnotežne točke se nazivaju *oscilatori*. Postoji bezbroj različitih načina da se ostvari takvo gibanje, a svima je zajedničko postojanje ravnotežne točke oko koje se oscilatorno gibaju i periodičnost - postojanje vremena nakon kojeg se gibanje ponavlja (ponavlja se i položaj i brzina). Prototip takvog gibanja je tijelo na podlozi bez trenja pričvršćeno za zid elastičnom oprugom, a to je ujedno i najjednostavnije oscilatorno gibanje. U tom slučaju je sila odgovora elastične opruge na sabijanje/istežanje proporcionalna

pomaku iz ravnotežnog položaja x :

$$F_x = -kx \quad (5.1)$$

gdje je s k opisana konstanta opruge koja mjeri jakost odgovora (veći k tvrđa opruga i obrnuto). U izrazima koji slijede pogodno je uvesti kružnu frekvenciju za sistem



Slika 5.1: Prototip jednostavnog harmoničkog oscilatora (JHO).

prikazan na slici 5.1 sljedećim izrazom:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5.2)$$

Gibanje JHO je opisano jednostavnom s pomoću 2. Newtonova zakona:

$$\sum F_x = -kx = m a_x = m \frac{d^2 x}{dt^2} =$$

Time smo dobili tipičnu diferencijalnu jednadžbu koja matematički predstavlja uvjet u kojem je nepoznanica funkcija za razliku od običnih gdje je nepoznanica samo broj.

$$0 = m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx \quad (5.3)$$

Rješavanje ove jednadžbe je standardni matematički postupak koji ovdje nećemo posebno obrazlagati jer nas zanima samo konačno opće rješenje. Funkcija koja opisuje jednostavno 1D harmoničko titranje i rješava diferencijalnu jednadžbu (5.3) ima sljedeći opći oblik:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (5.4a)$$

$$v_x(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi) \quad (5.4b)$$

$$a_x(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) \quad (5.4c)$$

gdje smo odmah napisali i eksplicitne izraze za brzinu i ubrzanje. Ukoliko ove izraze uvrstite u (5.3) možete se uvjeriti da zadovoljavaju jednadžbu neovisno o vrijednostima A i ϕ koji ovise o početnim uvjetima specifičnog slučaja. Vrlo često se promatra specijalni slučaj kada se tijelo na početku izmakne za neki iznos A iz ravnotežnog položaja te se pusti u titranje. U tom slučaju imamo $\phi = 0$ te dobivamo jednostavni bezdimenzionalni argument trigonometrijskih funkcija ωt koji vrijedi zapamtiti!

5.1.1 Titranje i energija

Elastična sila je konzervativna i s njom je povezana potencijalna energija

$$P_{HO} = \frac{1}{2}kx^2 \quad (5.5)$$

Ukoliko na HO ne utječe niti jedna vanjska sila zakon očuvanja energije osigurava da se tijekom titranja ukupna energija ne mijenja:

$$E_{HO} = K_{HO} + P_{HO} = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 \quad (5.6)$$

gdje je $A = |x_{max}|$ amplituda titranja, iz izraza (5.2) smo izveli $k = m\omega^2$, a posljednje dvije jednakosti posljedica su činjenicom da brzina ima iznos 0 kada je $x = A$ tako da je u tom trenutku kinetička energija 0. Ovim smo ujedno dobili jednostavan izraz za ukupnu energiju HO-a.

Primjer 5.1 (O). Tijelo je spojeno s idealnom elastičnom oprugom.

1. Koristeći zakon očuvanja energije obrazložite zašto je početna elongacija (ako je početna brzina 0) ujedno amplituda titranja tijekom proizvoljnog vremena.
2. Pokažite da je iznos maksimalne brzine tijekom titranja $v_{max} = \pm A\sqrt{k/m}$ i da se postiže kada je elastična sila nula (obično u ishodištu)?

Rješenje Koristeći izraz (5.6):

1. Ovo je izravna posljedica navedene jednadžbe jer je u tom slučaju potencijalna energija maksimalna pa je $x = \pm A$, a $v = 0$. Plus i minus odgovaraju desno/lijevo od ravnotežnog položaja tijekom titranja.

2. Na osnovu istog izraza maksimalna brzina se postiže pri maksimalnoj kinetičkoj energiji i minimalnoj potencijalnoj, a to odgovara $x = 0$. Uvrštavanje $x = 0$ u (5.6) daje:

$$E_{HO} = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_{max}^2 \Rightarrow v_{max} = \pm A\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Izraz (5.6) možemo formalno preurediti na način da ostvarimo vezu brzine i položaja kod HO. Iz izraza izravno slijedi:

$$\frac{1}{2}mv_x^2 = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx^2 \quad | \times \frac{2}{m}$$

$$v^2 = \frac{k}{m} (A^2 - x^2)$$

odnosno konačno:

$$v = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{A^2 - x^2} = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2} \quad (5.7)$$

gdje smo iskoristili definiciju kružne frekvencije (5.2).

Primjer 5.2 (O). Konstanta opruge SHO se udvostruči. Za koji faktor treba promijeniti masu tijela pričvršćenog za oprugu tako da se:

1. ubrzanje u ishodištu ne promjeni;
2. ubrzanje u $x=A$ ne promjeni;
3. brzina u $x=A$ ne promjeni;
4. period titranja ne promjeni;

uzevši da je A amplituda titranja.

Rješenje Prema izrazima koji opisuju harmoničko titranje:

1. ubrzanje u ishodištu je proporcionalno položaju x tako da je 0 bez obzira na promjenu vrijednosti k ili m ;

2. za $x = A$ imamo $a_x = -(k/m)A$ prema tome udvostručenje k uvjetuje udvostručenje mase m ;
3. brzina u $x = A$ je 0 tako da promjena k ne utječe na njenu vrijednost;
4. period titranja je funkcija omjera k/m (preko kutne frekvencije oscilatora) tako da se treba udvostručiti masu m ;

Primjer 5.3 (O). Tijelo se giba prema jednadžbi:

$$x(t) = (4.00 \text{ m}) \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Odredite:

1. amplitudu, period i frekvenciju gibanja;
2. brzinu i ubrzanje kao funkcije vremena;
3. položaj, brzinu i ubrzanje u $t = 1 \text{ s}$;
4. maksimalnu brzinu i ubrzanje;
5. udaljenost položaja u $t = 0 \text{ s}$ i $t = 1 \text{ s}$;

gdje je u formuli t u sekundama, a kut u radijanima.

Rješenje Polazeći od osnovnog izraza (5.4a) usporedbom dobivamo da je $A = 4.00 \text{ m}$, $\omega = \pi \text{ rad/s}$ i $\phi = \frac{\pi}{4}$. Prema tome $f = \omega/(2\pi) = 0.500 \text{ Hz}$, a period $T = 1/f = 2.00 \text{ s}$.

Na isti način s pomoću (5.4b) i (5.4c)

$$v_x(t) = -(4.00\pi \text{ m/s}) \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$a_x(t) = -(4.00\pi^2 \text{ m/s}^2) \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Izravno uvrštavanje $t = 1.00 \text{ s}$ u prethodni izraz za x :

$$x(1.00 \text{ s}) = (4.00 \text{ m}) \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = (4.00 \text{ m}) \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -2.83 \text{ m}$$

$$v_x(1.00 \text{ s}) = -(4.00\pi \text{ m/s}) \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -(4.00\pi \text{ m/s}) \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 8.89 \text{ m/s}$$

$$a_x(1.00 \text{ s}) = -(4.00\pi^2 \text{ m/s}^2) \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 27.9 \text{ m/s}^2$$

Traženi pomak dobijemo tako da odredimo položaj i u $t = 0.00 \text{ s}$:

$$x(0) = (4.00 \text{ m}) \cos\left(0 + \frac{\pi}{4}\right) = (4.00 \text{ m})(0.707) = 2.83 \text{ m}$$

Korištenjem rezultata za $t = 1.00 \text{ s}$ konačno imamo:

$$\Delta x = x(1.00 \text{ s}) - x(0.00 \text{ s}) = (-2.83 \text{ m}) - (2.83 \text{ m}) = -5.66 \text{ m}$$

Primjer 5.4 (O). Tijelo mase 0.5 kg je spojeno s idealnom oprugom konstante $k = 20.0 \text{ N/m}$. Ako tijelo harmonički titra horizontalno odredite:

1. ukupnu energiju sistema, ako tijelo titra amplitudom 3.00 cm ;
2. kolika je brzina, ako je elongacija 2.00 cm ;
3. kinetičku i potencijalnu energiju, ako je elongacija 2.00 cm ;

Kolika je amplituda i maksimalna brzina tijela ako je stavljeno u titranje s $x = 3.00 \text{ cm}$, ali sada s početnom brzinom $v = -0.100 \text{ m/s}$?

Rješenje U ovom primjeru koristimo izraze koje smo izveli u cjelini 5.1.1.

1. Korištenjem (5.6) izravno računamo:

$$E_{tot} = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(20.0 \text{ N/m})(0.0300 \text{ m})^2 = 9.00 \times 10^{-3} \text{ J}$$

2. Ovdje koristimo (5.7):

$$v = \pm \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{20.0 \text{ N/m}}{0.500 \text{ kg}} [(0.0300 \text{ m})^2 - (0.0200 \text{ m})^2]} = \pm 0.141 \text{ m/s}$$

Pozitivni i negativni predznak označavaju moguće smjerove gibanja tijela (desno ili lijevo, kao na slici 5.1).

3. Korištenje prethodnih rezultata nam izravno daje:

$$K_{HO} = \frac{1}{2}mv_x^2 = \frac{1}{2}(0.500 \text{ kg})(0.141 \text{ m/s})^2 = 5.00 \times 10^{-3} \text{ J}$$

$$P_{HO} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(20.0 \text{ N/m})(0.0200 \text{ m})^2 = 4.00 \times 10^{-3} \text{ J}$$

Primijetite da je osigurano $E_{tot} = K_{HO} + P_{HO}$ kako i treba biti prema (5.6).

Primjer 5.5 (O). Čestica se vrti jednoliko po kružnici polumjera 3.00 m stalnom kutnom brzinom 8.00 rad/s. U $t=0$ s čestica ima x koordinatu 2.00 m i giba se u desno.

1. odredite funkciju ovisnosti x koordinate o vremenu;
2. odredite x komponentu brzine i ubrzanja za bilo koji trenutak;

Rješenje U ovom primjeru koristimo skup izraza (5.4). Obzirom da je u podacima kružna frekvencija zadana možemo iskoristiti (5.4a):

$$x = A \cos(\omega t + \phi) = (3.00 \text{ m}) \cos(8.00t + \phi)$$

Prema uvjetu zadatka imamo:

$$2.00 \text{ m} = (3.00 \text{ m}) \cos(8.00t + \phi) \Rightarrow \phi = \cos^{-1} \left(\frac{2.00 \text{ m}}{3.00 \text{ m}} \right)$$

Ovdje je potrebno oprezno odrediti inverz funkcije \cos . Naime, postoji beskonačno kuteva danog kosinusa i ako bismo ovdje odabrali rješenje koje često ponudi kalkulator

$\phi = 0.841 \text{ rad}$ tada bi $x = (3.00 \text{ m}) \cos(8.00t + 0.841)$ značilo da se u $t = 0$ čestica giba lijevo što je suprotno uvjetu problema. Prema tome (matematički jednakovrijedan) odabir $\phi = -0.841 \text{ rad}$ osigurava traženo ponašanje te imamo konačno rješenje:

$$x = (3.00 \text{ m}) \cos(8.00t - 0.841)$$

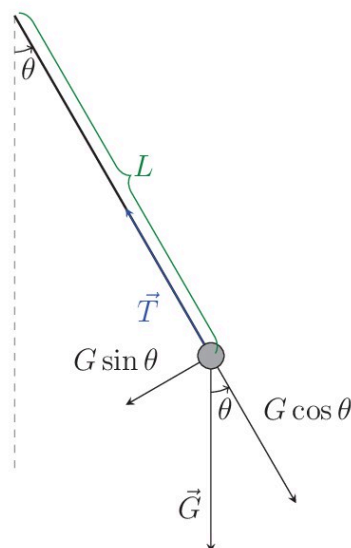
Određivanje izraza za brzinu i ubrzanje jednostavna je primjena izraza (5.4b) i (5.4c) pa tako za brzinu imamo:

$$v_x = -(3.00 \text{ m})(8.00 \text{ rad/s}) \sin(8.00t - 0.841) = -(24.0 \text{ m/s}) \sin(8.00t - 0.841)$$

dok za ubrzanje vrijedi:

$$a_x = -(3.00 \text{ m})(8.00 \text{ rad/s})^2 \cos(8.00t - 0.841) = -(192.0 \text{ m/s}^2) \cos(8.00t - 0.841)$$

5.1.2 Njihala



Slika 5.2: Prototip jednostavnog matematičkog njihala. \vec{G} je gravitacijska sila, a \vec{T} je napetost niti.

Gibanje matematičkog njihala je opisano jednostavnom inačicom 2. Newtonova zakona:

$$\sum F_t = -mg \sin(\theta) = m a_t = m \frac{d^2 s_t}{dt^2} = m L \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

gdje smo promatrali tangencijalno gibanje po kružnici i označili prijeđeni put sa $s_t = L\theta$ gdje je kut θ dan u radijanima. Jednadžbu preuredimo i dobijemo:

$$0 = L \frac{d^2\theta}{dt^2} + g \sin(\theta)$$

koja je slična diferencijalnoj jednadžbi za JHO (5.3), ali ne sasvim jer "smeta" funkcija \sin s desne strane. Zapravo ona komplicira rješavanje ove jednadžbe toliko da, bez obzira što postoji, rješenje nije konačan zbroj elementarnih funkcija. Moguće ga je dobiti kompjutorskim numeričkim rješavanjem u svakom konkretnom slučaju, ali mi ćemo se ovdje odlučiti za vrlo važan posebni slučaj malih titranja. Promatramo klasu problema gdje je amplituda kuta θ tijekom titranja po apsolutnoj vrijednosti takva da možemo pretpostaviti (u radijanima)¹:

$$\sin(\theta) = \theta \quad (5.8)$$

Iako na prvi pogled možemo imati zadržku prema ovom pristupu kvantitativna analiza nas može uvjeriti da tako možemo promatrati vrlo zanimljive i važne probleme. Postavimo ograničenje da je pogreška manja od 0.5%. to znači da zahtijevamo

$$0.005 > \left| \frac{\theta - \sin(\theta)}{\theta} \right|$$

u blizini ravnotežnog položaja $\theta = 0$. Na kalkulatoru lako možete provjeriti da je to zadovoljeno ukoliko promatramo titranje tijekom kojih kut zadovoljava:

$$-10^\circ = -0.18 \text{ rad} < \theta < 0.18 \text{ rad} = 10^\circ$$

Ako se tijekom titranja javlja kut otklona veći po apsolutnoj vrijednosti od 10° ovo približenje ubrzo prestaje vrijediti i daje neprihvatljive rezultate.

Ukoliko se ograničimo na primjere gdje nam vrijedi uvjet (5.8) s dovoljnom preciznošću imamo konačno za matematičko njihalo prikazano na slici 5.2:

$$0 = L \frac{d^2\theta}{dt^2} + g\theta \quad (5.9)$$

¹One upoznate s neodređenim oblicima u matematičkoj analizi upućujemo da je ovo približenje povezano s dobro poznatim rezultatom $1 = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta}$

Ovo je diferencijalna jednačba matematički je identična onoj za JHO (5.3) tako da i rješenje ima isti oblik kao i (5.4):

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (5.10a)$$

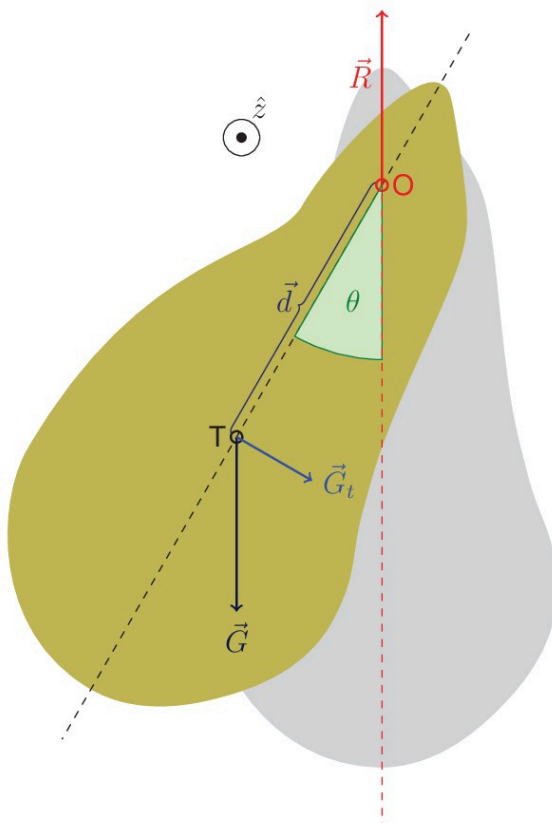
$$\dot{\theta}(t) = -\omega_0 \theta_0 \sin(\omega_0 t + \phi) \quad (5.10b)$$

$$\ddot{\theta}(t) = -\omega_0^2 \theta_0 \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (5.10c)$$

uz drukčiji izraz za kružnu frekvenciju (analogne (5.2)):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (5.11)$$

amplituda θ_0 titranja je kut, a $\ddot{\theta}(t)$ konačno predstavlja kutno ubrzanje.



Slika 5.3: Prototip jednostavnog fizičkog njihala. Na tijelo djeluju gravitacijska sila \vec{G} s hvatištem u težištu te reakcija u ovjesištu \vec{R} . Titranje su uzrokovane momentom sile $\vec{d} \times \vec{G} = \vec{d} \times \vec{G}_t$ iznosa dG_t . \hat{z} je jedinični vektor koji zadaje smjer okomit na ravninu, a to je smjer momenta gravitacijske sile.

Period titranja za fizičko njihala mase m je dan sa sljedećim izrazom:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I_O}{mgd}} \quad (5.12)$$

gdje oznake slijede 5.3 tako da je I_O moment inercije, a d udaljenost težišta i ovjesišta. Ovaj rezultat se dobije iz diferencijalne jednadžbe analogne (5.9) koja modelira gibanje sistema prikazana na slici 5.3. Prvo odredimo ukupni moment sile oko ishodišta u ovjesištu O:

$$\vec{\tau}_O = \vec{d} \times \vec{G} = \vec{d} \times m\vec{g} = -dmg \sin(\theta) \hat{z} \quad G_t = mg \sin(\theta)$$

gdje smo s \hat{z} označili jedinični vektor smjera okomita na ravninu titranja u skladu s notacijom korištenom na slici 5.3. Korištenjem iskaza 2. Newtonova zakona za vrtnju (4.14) oko čvrste osi kroz točku O imamo:

$$(\tau_O)_z = -dmg \sin(\theta) = I_O \frac{d^2\theta}{dt^2} \simeq -dmg \theta \quad (5.13)$$

Ova jednadžba je formalno identična s (5.9) te se analogno može očitati rezultat (5.12) u slučaju malih titranja gdje se koristi približenje dano s (5.8). Kao i u slučaju matematičkog njihala imamo jednadžbu koju smo riješili (5.9), a formalno istu dobivamo približenjem malih titranja na (5.13).

Primjer 5.6 (O). Homogen štap mase M i duljine L titra oko ovjesišta u jednom kraju štapa. Odredite period malih titranja.

Rješenje Već smo odredili moment inercije štapa oko osi kroz kraj štapa (4.7) tako da možemo izravno koristiti (5.12):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ML^2/3}{Mg(L/2)}} = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

5.1.3 Prigušeno titranje

Realno titranje na makro razini prati trenje odnosno općenito neki oblik gušenja. Kod gibanja tijela kroz fluide smo uveli otpor koji je proporcionalan brzini za relativno male

brzine i kvadratu za velike. Ovdje ćemo promatrati najjednostavniju varijantu sa silom otpora oblika $\vec{R} = -b\vec{v}$. Kako promatramo 1D sistem jednažba gibanja ima oblik:

$$\sum F_x = -kx - bv_x = m a_x = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (5.14)$$

što predstavlja novu diferencijalnu jednažbu čije rješavanje uključuje tehnike koje ovdje nisu presudne tako da ćemo izravno napisati konačni rezultat:

$$x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \phi) \quad (5.15)$$

(koji odgovara (5.4a) bez gušenja $b = 0$) gdje imamo novi izraz za kružnu frekvenciju:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad (5.16)$$

koji također odgovara (5.2) u slučaju bez gušenja $b = 0$. Uveli smo i dvije uobičajene oznake za karakteristične veličine oscilatora ω_0 i γ .

Primjer 5.7 (O). Pretpostavimo da je masa 500 kg pričvršćena na idealnu oprugu konstantne 2000 N/m uz amortizer konstantne 20 Ns/m. Odredite:

- Prirodna (nesmetana) kružna frekvencija i frekvencija u Hz.
- Učestalost primjene prigušivanja
- Q sustava
- Vrijeme da se amplituda smanji na 1/10 svoje početne vrijednosti.
- Energija kada se amplituda smanji na 1/10 svoje početne vrijednosti.

Rješenje Kako je $m = 500 \text{ kg}$, $k = 2000 \text{ N/m}$, a $c = 20 \text{ Ns/m}$.

- Upotrijebimo $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 2.00 \text{ rad/s}$. Odatle dobijemo $f_0 = \omega_0/2\pi = 0.318 \text{ Hz}$.
- $\gamma = b/2m = 0.020 \text{ rad/s}$ tako da je

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = 2.00 \text{ rad/s}$$

- c) Faktor Q sustava je $Q = \omega_d/2\gamma = 50.0$
- d) Ovojnica amplitude je $A(t) = A_0 e^{-\gamma t}$. Prema tome rješavamo $1/10 = e^{-0.020t}$ te dobijemo $t = 115 \text{ s}$ (37 perioda oscilacija).
- e) Kako je $E \propto A^2$ smanjenje amplitude 10X odgovara smanjenju energije titranja 100X.

Primjer 5.8 (O). Njihalo duljine 1.00 m je pušteno u njihanje s početnim otklonom 15.0 stupnjeva. Nakon 1000 s trenje je smanjilo amplitudu na 5.50 stupnjeva. Odredite vrijednost vremenske konstante $b/2m$ za gušeno titranje.

Rješenje Kada imamo njihalo kao HO to znači da titrajuću fizičku veličinu označavamo s $x \rightarrow \theta$ tako da imamo kut odmaka iz ravnotežnog položaja ($\phi = 0$ ovdje):

$$\theta(t) = \theta_p e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t)$$

Prema podacima iz zadatka imamo:

$$\frac{\theta(1000 \text{ s})}{\theta_p} = \frac{5.50}{15.0} = e^{-\frac{b}{2m}1000} \quad \left| \ln \right.$$

$$\ln \frac{5.50}{15.0} = -1.00 = -\frac{b}{2m}1000 \Rightarrow \frac{b}{2m} = 1.00 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$$

5.2 Valovi

"... the wave flees the place of its creation, while the water does not; like the waves made in a field of grain by the wind, where we see the waves running across the field while the grain remains in its place."

- Leonardo di Vinci, Bilježnice - XVI. Fizička geografija

Do sada smo promatrali gibanje čestica, a zatim i tijela. Postavlja se pitanje da li je pored čestice ili toka čestica postoji fenomen koji ima značajku kretanja. Odgovor na

ovo pitanje je potvrđan. Zapravo gotovo ste sigurno vidjeli takvu pojavu, a to su *valovi*. Kada bacite kamen u mirnu vodu na moru ili jezeru koncentrični kružni poremećaji koji se šire su primjer jedne od najznačajnijih fundamentalnih fizičkih veličina. Osnovna značajka valova je da se ne prenosi tvar već energija i da su sveprisutni u univerzumu. Sama svjetlost je valna pojava. Mi ćemo se ovdje ograničiti uglavnom na mehaničke valove, ali gotovo sav formalizam koji ovdje izlažemo može se primijeniti na sve vrste valova uključujući i svjetlost koja je zapravo elektromagnetski val (titranje električnog i magnetskog polja u tvari ili vakuumu).

5.2.1 Model vala

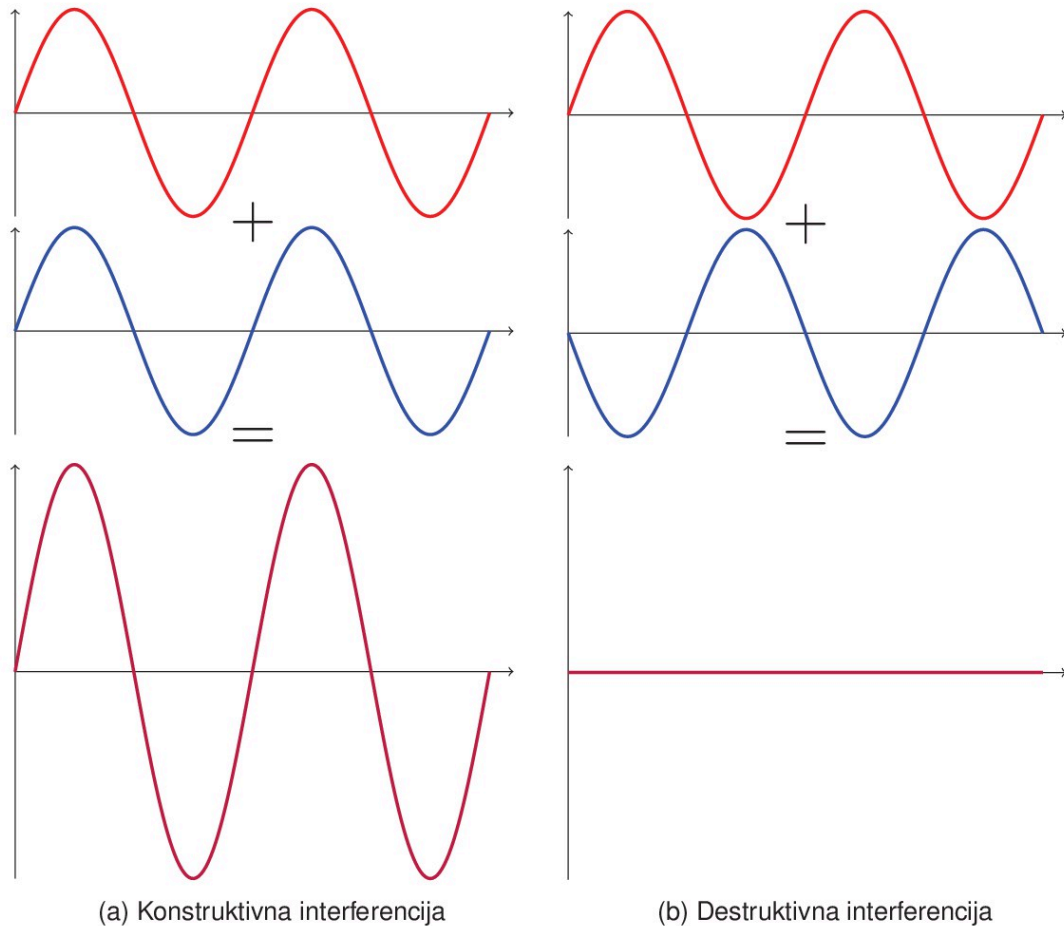
U prethodnim poglavljima smo upoznali model pri gibanju tvari - čestični model, a u ovoj cjelini ćemo uvesti neke elemente koji nam omogućavaju kvantitativni opis valova s pomoću odgovarajućeg matematičkog modela. Ovaj model razvijamo oko ideje prijenosa energije valovima i počinjemo s osnovnom podjelom načina na koji se poremećaj u mediju lokalno prikazuje. Vidjet ćemo da val predstavlja prostorno-vremenski usklađeno gibanje mnoštva čestica medija u kojem se širi²:

1. **longitudinalni val** - gibanje medija je okomito na smjer širenja vala
2. **transverzalni val** - gibanje medija je u smjeru širenja vala

Valove možemo podijeliti i obzirom na medij koji titra: mehaničke i elektromagnetske (samoodržavajući bez potrebe za medijem). Kod mehaničkih valova medij je tvar kroz koju se energija prenosi putem poremećaja ravnotežnog stanja. Za valove na vodi to je voda, u struni žičanog instrumenta struna, za zvuk to je plin - zrak itd.

Slika 5.4 prikazuje jednu od najvažnijih značajki valova *interferenciju* koja se javlja kada se dva vala susretnu u jednoj prostorno vremenskoj točki. Ukoliko se radi o linearnim valovima (najčešća i ovdje jedino analizirana vrsta valova obzirom na superponiranje) posljedica je jednostavna - amplituda složenog vala je zbroj amplituda pojedinih

²Ovdje napominjemo da jedna od najvažnijih valnih pojava - elektromagnetski val ima značajku da se može širiti u vakuumu, dakle bez medija. Mi ćemo promatrati mehaničke valove koji su uvijek povezani s medijem kojeg shvaćamo kao skup neizmjereno mnogo čestica u međudjelovanju.



(a) Konstruktivna interferencija

(b) Destruktivna interferencija

Slika 5.4: Prikaz krajnjih oblika interferencije putem kojih možemo razumjeti prijelazne slučajeve koji su beskonačni niz mogućih ishoda pomaka u fazi valova koji su u superpoziciji.

valova. U razmatranjima se ova pojava najčešće prezentira isticanjem dva ekstremna slučaja:

1. konstruktivna
2. destruktivna

što u drugom slučaju daje amplitudu 0 posvuda.

5.2.2 Brzina vala

Poremećaj u mediju - val - započinje u dijelu prostora koji nazivamo izvor. To je mjesto gdje kamen bačen pada u vodu iz prvog primjera. Od trenutka nastanka poremećaj se širi određenom brzinom koju nazivamo *brzina vala*. Još jednom napominjemo da se prostorno pri širenju vala ne prenosi tvar već samo energije. Za jednostavni HV kinematički možemo odrediti brzinu vala poznavajući osnovne značajke harmoničkog titranja. Kroz jednu točku vala tijekom perioda T prođe upravo jedna valna duljina λ tako da imamo za faznu brzinu:

$$v_s = \frac{\lambda}{T} = \lambda f = \frac{\omega}{k} \quad (5.17)$$

Valna brzina je značajka medija tako da za puls kroz napetu metalnu žicu imamo izraz:

$$v_s = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (5.18)$$

gdje je T napetost niti, μ linijska gustoća. Ovakvi izrazi će se sistematski pojavljivati u primjerima, a predstavljaju činjenicu da je brzina vala značajka medija kroz koji se širi. Forma izraza ostaje ista tako da je na primjer brzina uzdužnog vala³ kroz čvrstu tvar (metalne legure):

$$v_s = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

gdje je E Youngov modul iz (4.19). Analogno kompresijskog vala

$$v_s = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

gdje je B volumni (4.22) ili posmičnog vala

$$v_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

³Dilatacija čestica u smjeru širenja.

gdje je G modul smicanja iz (4.20). U svim primjerima ρ je gustoća medija kojim se val prostire. Podrobnijom analizom se pokazuje da općeniti oblik možemo predstaviti sljedećim izrazom:

$$\text{brzina} = \sqrt{\frac{\text{elastična značajka}}{\text{inercijalna značajka}}}$$

Bilo koji poremećaj ravnog vala koji se kreće stalnom brzinom v ima oblik $f(x - vt)$. Može se pokazati da ovakav oblik funkcije zadovoljava valnu jednadžbu pri čemu se brzina gibanja poremećaja oblika zadana funkcijom f izražava relacijama za elastične medije koje smo naveli u prethodnom paragrafu kao npr. (5.18). Primjere ćemo promotriti u zadacima 5.9 i 5.10.

Osnovni oblik vala dobro definirane valne duljine i frekvencije je *harmonički val* (HV), a iznos poremećaja y u ovisnosti o položaju i vremenu (x, t) opisuje sljedeći matematički izraz:

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi) \quad (5.19)$$

gdje je A amplituda, k kružni valni broj, ω kružna frekvencija i ϕ je konstanta faze vala. y je iznos poremećaja koji se širi kroz medij u prostorno vremenskoj točki (x, t) . Oblik funkcije se slaže s prethodnim općenitim izrazom za putujući poremećaj $f(x - vt)$ iako nije eksplicitno vidljivo. Podudarnost oblika se može dokazati jednostavnom preuredbom izraza (5.19):

$$A \sin(kx - \omega t + \phi) = A \sin[k(x - \omega/k t)] \cos(\phi) + A \cos[k(x - \omega/k t)] \sin(\phi)$$

iz čega se dobiva traženi oblik ukoliko vrijedi $v = \omega/k$, a to je upravo jedna od niza relacija koje vrijede za (precizno rečeno faznu) brzinu vala. Ovdje je funkcija f :

$$f(z) = A \sin(kz) \cos(\phi) + A \cos(kz) \sin(\phi)$$

gdje stavljamo za argument $z = x - vt$.

Poveznica osnovnih fizičkih veličina HV i pojedinog oscilatora (djelića mase koji har-

monički titra) je dana sljedećim izrazima:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (5.20a)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (5.20b)$$

$$f = \frac{1}{T} \quad (5.20c)$$

gdje je λ valna duljina, T period. Ove relacije su konzistentne s (5.17) za faznu brzinu vala v .

Primjer 5.9 (V). Puls koji je predstavljen funkcijom:

$$y(x, t) = \frac{4}{(x - 3.0t)^4 + 2}$$

gdje su x i y dani u cm, a t u sekundama. Skicirajte funkciju u $t = 0.0, 1.0, 2.0$ s!

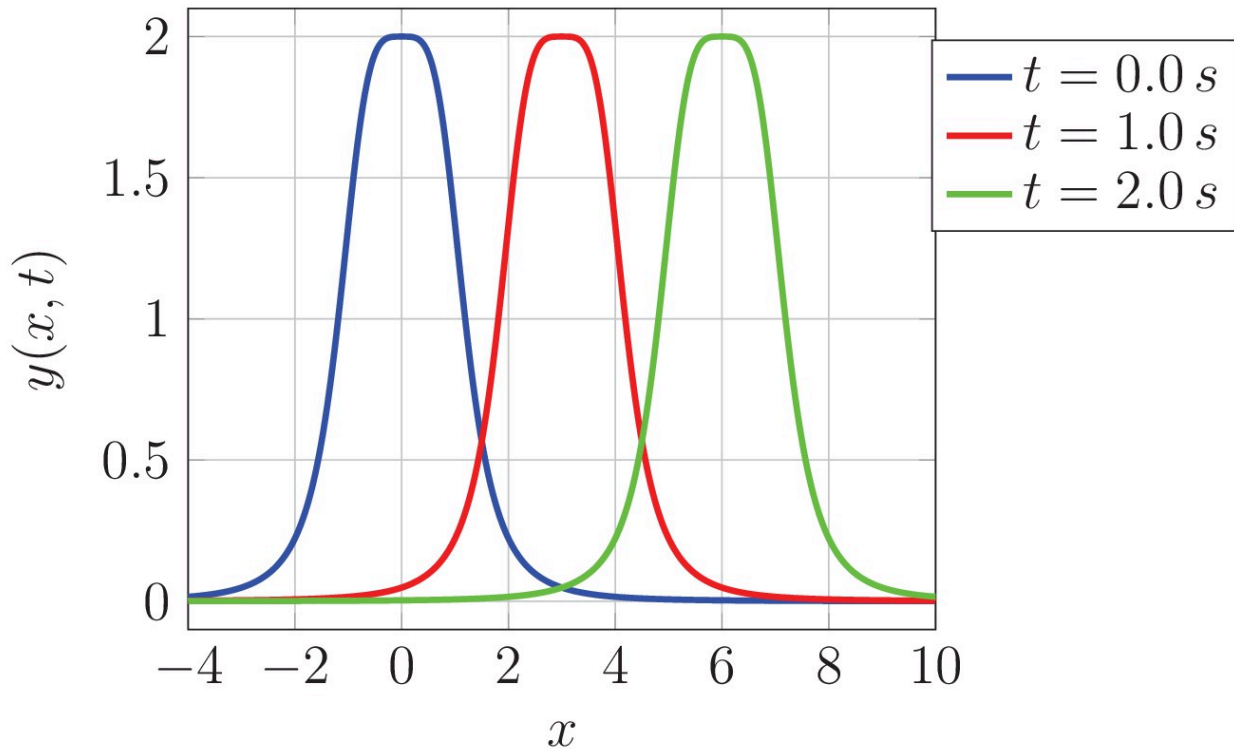
Rješenje Problem se svodi na crtanje 3 realne funkcije jedne varijable:

$$y(x, 0.0) = \frac{4}{(x - 0.0)^4 + 2}$$

$$y(x, 1.0) = \frac{4}{(x - 3.0)^4 + 2}$$

$$y(x, 2.0) = \frac{4}{(x - 6.0)^4 + 2}$$

Na sljedećem grafu su prikazane prostorne ovisnosti pulsa u zadanim vremenima:



Primjer 5.10 (V). Sinusoidalni val koji se giba u $+x$ smjeru ima amplitudu 15.0 cm , valnu duljinu 40.0 cm i frekvenciju 8.00 Hz . Neka je u $t=0\text{ s}$ amplituda elementa u $x=0$ također 15 cm .

1. odredite valni broj k , period T , kružnu frekvenciju ω i brzinu širenja vala v ;
2. Odredite fazu i opći izraz $y(x,t)$ za ovaj val.

Rješenje Koristeći se izrazima za harmonički val (5.20):

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{40.0\text{ cm}} = 0.157\text{ rad/cm} \quad T = \frac{1}{f} = \frac{1}{8.00\text{ s}^{-1}} = 0.125\text{ s}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(8.00\text{ s}^{-1}) = 50.3\text{ rad/s} \quad v = \lambda f = (40.0\text{ cm})(8.00\text{ s}^{-1}) = 320\text{ cm/s}$$

Kako je $A = 15.0\text{ cm}$ i $y = 15.0\text{ cm}$ za $x = 0$ i $t = 0$ uvrštavanjem u (5.19) dobivamo:

$$15.0 = (15.0) \sin(\phi) \Rightarrow \phi = \pi/2$$

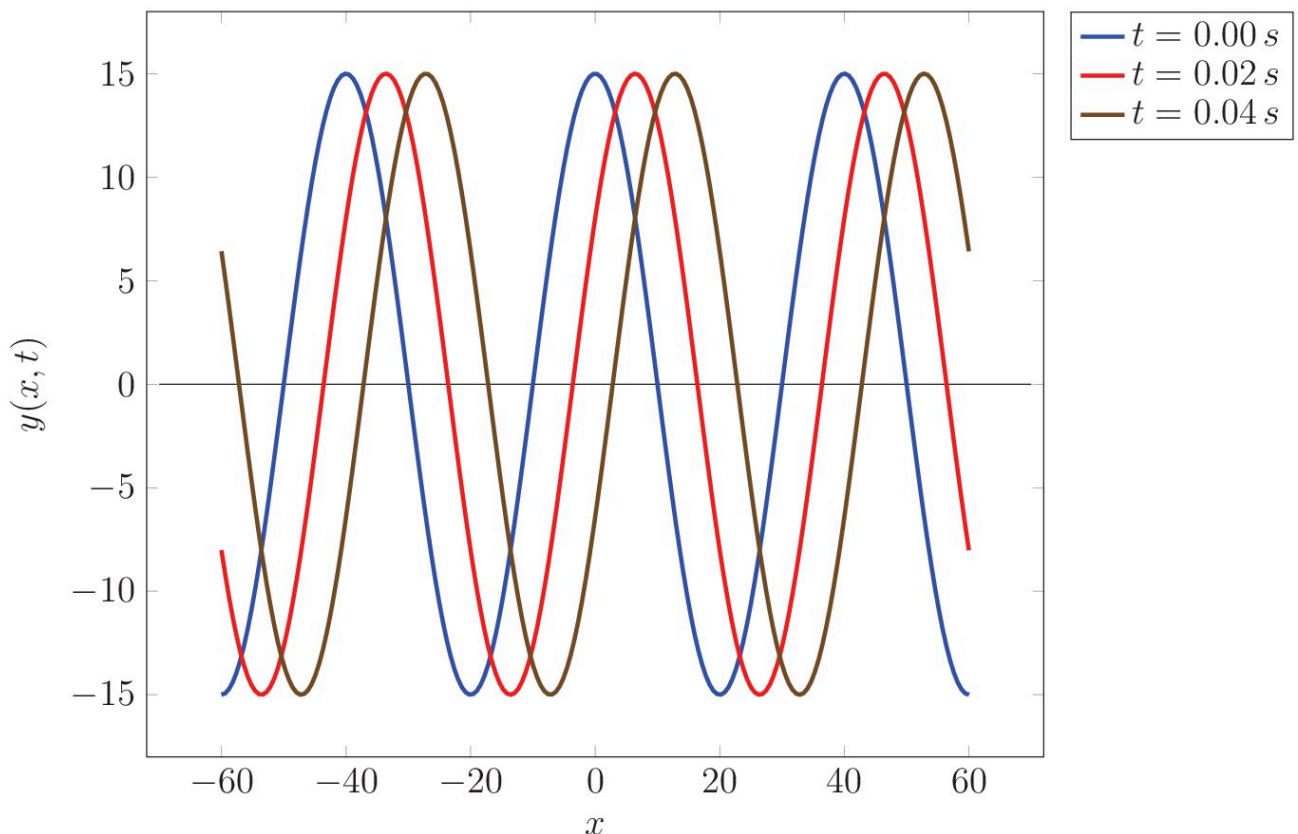
Sada imamo sve veličine i (5.19) poprima oblik:

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \pi/2) = A \cos(kx - \omega t)$$

pri čemu smo iskoristili dobro poznati trigonometrijski identitet koji povezuje funkcije \sin i \cos . Opći izraz prema prethodnim izračunima je:

$$y(x, t) = (15.0 \text{ cm}) \cos(0.157x - 50.3t)$$

što predstavlja 1D HV koji putuje desno ($u +x$ smjeru). Sljedeća slika prikazuje val u tri uzastopna trenutka.



5.2.3 Energija i snaga vala

Osnovna činjenica fenomena val je prenošenje energije, a posljedica je da možemo promatrati i snagu vala - energiju u jedinici vremena koja prolazi zamišljenu površinu okomitu na smjer širenja. Tijekom izlaganja i analize ćemo koristiti model napete elastične niti kojom se širi HV. Ako nit kojom se širi HV zamislimo kao niz djelića mase $\Delta m = \mu \Delta x$ međusobno povezanih elastičnom silom koji usklađeno⁴ harmonički titraju gdje je μ linijska gustoća mase niti. Za svaki djelić niti ukupna energija oscilatora iznosi prema (5.6):

$$\Delta E_{HO} = \frac{1}{2} \Delta m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \Delta x$$

Ukupna energija povezana s jednom valnom duljinom HV se dobije zbrajanjem doprinosa zadanih prethodnim izrazom po dijelovima Δx dok se ne uključe svi doprinosi ukupne duljine λ :

$$E_\lambda = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \lambda$$

Opisu snage vala možemo pojednostavljeno pristupiti na sljedeći način: promotrimo jednu valnu duljinu tijekom jednog perioda HV (kao na slici u primjeru 5.10) gdje svaki djelić mase harmonički titra zajedničkom frekvencijom i amplitudom. Tijekom jednog perioda titranja T kroz jednu točku HV-a se prenese upravo energija E_λ tako da prosječnu snagu možemo izraziti kao:

$$\langle P_{HV} \rangle = \frac{E_\lambda}{T} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \frac{\lambda}{T} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 v \quad (5.21)$$

gdje smo u posljednjem koraku prepoznali brzinu širenja vala (5.17).

Primjer 5.11 (V). Napetost niti linijske gustoće 50 g/m je 80.0 N. Kolika snaga je potrebna za održavanje sinusoidalnog vala frekvencije 60.0 Hz i amplitude 6.00 cm? Kolika je amplituda ako se očekuje da nit treba prenositi 1.00 kW, a svi ostali parametri (osim amplitude) ostaju isti?

Rješenje Brzina vala u napetoj niti je dana s (5.18):

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{80.0 \text{ N}}{5.00 \times 10^{-2} \text{ kg/m}}} = 40.0 \text{ m/s}$$

⁴Ovdje usklađeno znači da je se faza djelića niti susjeda vrlo malo razlikuje tako da se tijekom titranja prate. Drugim riječima nit ne puca uslijed promjene oblika.

Kružna frekvencija (5.20b) je:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi (60.0 \text{ Hz}) = 377 \text{ s}^{-1}$$

Prosječna snaga vala (5.21) u ovom slučaju iznosi:

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 v \\ &= \frac{1}{2} (5.00 \times 10^{-2} \text{ kg/m}) (377 \text{ s}^{-1})^2 (6.00 \times 10^{-2} \text{ m})^2 (40.0 \text{ m/s}) = 512 \text{ W} \end{aligned}$$

Omjer snaga da bi se prenosila snaga 1.00 kW ima oblik:

$$\frac{\langle P_n \rangle}{\langle P_o \rangle} = \frac{\frac{1}{2} \mu \omega^2 A_n^2 v}{\frac{1}{2} \mu \omega^2 A_o^2 v} = \frac{A_n^2}{A_o^2}$$

Sada možemo riješiti jednadžbu i odrediti potrebnu amplitudu:

$$A_n = A_o \sqrt{\frac{\langle P_n \rangle}{\langle P_o \rangle}} = (6.00 \text{ cm}) \sqrt{\frac{1000 \text{ W}}{512 \text{ W}}} = 8.39 \text{ cm}$$

Primjer 5.12 (V). Problem brzine zvuka u vodi.

1. Odredite brzinu zvuka u vodi, volumni modul $2.1 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, pri nula stupnjeva celsiusa. Gustoća vode neka je $1.00 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$.
2. Delfini se koriste valove zvuka (sonar) za otkrivanje položaja plijena. Eksperimenti pokazuju da su u stanju detektirati plijen dug 7.5 cm koji se nalazi na 110 m udaljenosti, čak i u mutnoj vodi. Da bi započeo lov, koliko vremena protekne od trenutka kada emitira zvuk do trenutka kada dobije informaciju o plijenu (uzmite $v_s = 1533 \text{ m/s}$)?

Rješenje Prvi dio zadatka predstavlja izravnu primjenu izraza za brzinu širenja u elastičnom mediju:

$$v_{\text{voda}} = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{2.1 \times 10^9 \text{ N/m}^2}{1.00 \times 10^3 \text{ kg/m}^3}} = 1.4 \text{ km/s}$$

Općenito je zvuk sporiji u fluidima od čvrste tvari jer su fluidi lakše stlačivi. Brzina također opada s temperaturom.

Ukupna udaljenost koju prevali val zvuka od delfina do plijena i nazad iznosi $2 \times 110 \text{ m} = 220 \text{ m}$. U moru pri 25° brzina zvuka iznosi 1533 m/s :

$$\Delta t = \frac{\Delta L}{v} = \frac{220 \text{ m}}{1533 \text{ m/s}} = 0.14 \text{ s}$$

Primjer 5.13 (V). Val valne duljine λ_1 i frekvencije f_1 širi se sredstvom brzinom v . Ako prijeđe u drugo sredstvo i u njemu se širi brzinom $2v$, kolika su valna duljina i frekvencija u drugom sredstvu (pomoć: rezultate izrazite pomoću λ_1 i f_1)?

Rješenje Pri prijelazu iz jednog u drugo sredstvu frekvencija se ne može mijenjati jer bi to značilo prekid amplitude (ako na spoju medija dva susjedna djelića vala titraju različitom frekvencijom na strani jednog i drugog medija ne može se održati neprekidnost vala). Prema tome jedino se može promijeniti valna duljina:

$$f_1 = f_2 = f \Rightarrow f = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{2v}{\lambda_2}$$

Konačno imamo vezu valnih duljina u dva medija koja je posljedica načela neprekidnosti vala pri prijelazu iz jednog u drugo sredstvo gdje se mijenjaju značajke širenja:

$$\lambda_2 = 2\lambda_1$$

Primjer 5.14 (V). Sirena vatrogasnoga vozila proizvodi ton frekvencije 500 Hz.

1. Vatrogasno vozilo se približava automobilu koji miruje brzinom 20 m/s. Odredite frekvenciju tona koju čuje osoba u automobilu;
2. Vatrogasno vozilo se zaustavi, a automobil se počne udaljavati na način da sada osoba u automobilu čuje ton 471 Hz. Odredite s kojom brzinom se automobil udaljava;

Rješenje Počevši od $f_S = 500 \text{ Hz}$, $v = 343 \text{ m/s}$, $v_S = +20.0 \text{ m/s}$, a $v_L = 0$ koristeći relacije za Dopplerov učinak:

$$f_L = f_S \left(\frac{v + v_L}{v - v_S} \right) = (500 \text{ Hz}) \left(\frac{343 \text{ m/s}}{(343 \text{ m/s}) - (20.0 \text{ m/s})} \right) = 531 \text{ Hz}$$

U drugom slučaju $v_S = 0.0 \text{ m/s}$, a $f_L = 471 \text{ Hz}$:

$$f_L = 471 \text{ Hz} = f_S \left(\frac{v + v_L}{v - v_S} \right) = (500 \text{ Hz}) \left(\frac{(343 \text{ m/s}) + v_L}{343 \text{ m/s}} \right)$$

slijedi

$$\frac{471 \text{ Hz}}{500 \text{ Hz}}(343 \text{ m/s}) = (343 \text{ m/s}) + v_L \implies v_L = -20 \text{ m/s}$$

gdje negativan predznak odgovara udaljavanju od izvora vala. ◀

5.2.4 Stojni valovi

Posebna vrsta valova se dobiva pri superpoziciji dva harmonička vala koja se kreću u suprotnom smjeru:

$$y_1 = A \sin(kx - \omega t) \quad y_2 = A \sin(kx + \omega t)$$

Superponiranje odgovara zbrajanju amplituda:

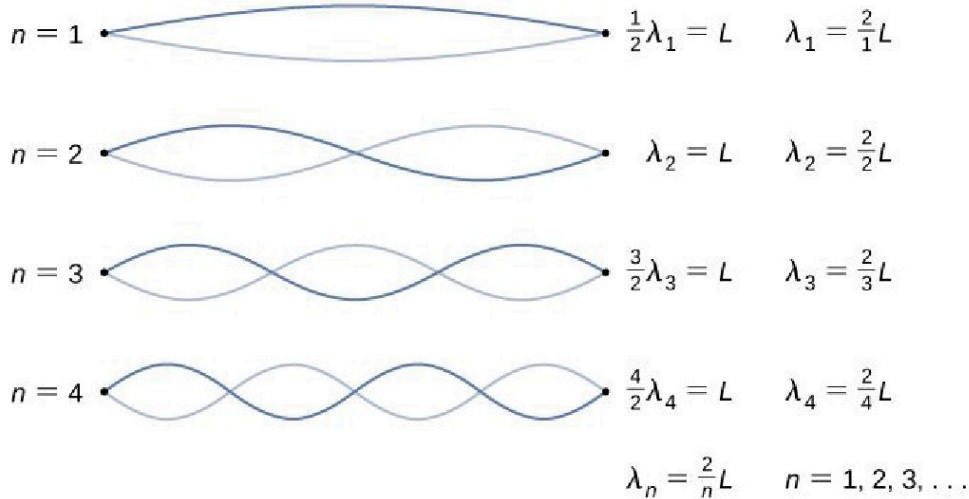
$$y = y_1 + y_2 = A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx + \omega t)$$

ovdje korištenjem trigonometrijskog identiteta $\sin(a \pm b) = \sin(a) \cos(b) \pm \cos(a) \sin(b)$ dobivamo važan rezultat:

$$y = (2A \sin kx) \cos \omega t \quad (5.22)$$

Mogući osnovni uzorci stojnih valova za elastičnu nit učvršćenu na krajevima prikazuje slika 5.5. Osnovna značajka rezultata (5.22) je postojanje mjesta na niti koje imaju stalnu amplitudu 0. Njih zovemo *čvorovi*, a odgovaraju položajima na niti u kojima je sinusna funkcija jednaka nuli.

$$\begin{aligned} \sin(kx) &= 0 \\ kx &= 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots \\ \frac{2\pi}{\lambda}x &= 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots \\ x &= 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, \dots = n\frac{\lambda}{2} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$



Slika 5.5: Stojni valovi na napetoj elastičnoj niti duljine L pri čemu su krajevi nepomični (čvorovi). Mogući su samo određeni uzorci pri ovoj vrsti valova, a sve ih je moguće dobiti superponiranjem prikazanih osnovnih koje nazivamo normalnim modovima. U eksperimentu bi se amplituda smanjivala sa smanjenjem valne duljine.

Postoje i položaji gdje y titra između $y = \pm A$, a njih nazivamo *protučvorovi*. Možemo ih odrediti uzimajući u obzir vrijednosti x za koje \sin poprima vrijednosti ± 1 :

$$\begin{aligned} \sin(kx) &= 1 \\ kx &= \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots \\ \frac{2\pi}{\lambda}x &= \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots \\ x &= \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \dots = n\frac{\lambda}{4} \quad n = 1, 3, 5, \dots \end{aligned}$$

Prvi mod koji na napetoj niti duljine L možemo pobuditi nosi broj $n = 1$ i naziva se osnovni harmonik⁵ ili fundamentalni mod. Kod ovog moda je formirana samo polovina ukupne valne duljine na napetoj niti tako da vrijedi $\lambda_1 = 2L$. Slika 5.5 prikazuje kako se povećanjem broja harmonika mijenja (smanjuje) valna duljina u diskretnim iznosima.

Sljedeći primjer predstavlja stojni val (5.22) koji je posljedica interferencije dva 1D HV koji se gibaju u suprotnom smjeru.

Primjer 5.15 (V). Dva 1D vala koji putuju u suprotnom smjeru opisana su sljedećim

⁵Ovo su principi na kojima se zasnivaju žičani instrumenti kod kojih se strune obično ugađaju mijenjanjem napetosti.

valnim funkcijama:

$$y_1 = (4.00 \text{ cm}) \sin(3.0x - 2.0t)$$

$$y_2 = (4.00 \text{ cm}) \sin(3.0x + 2.0t)$$

gdje x mjerimo u cm , a t u s . Superponiranjem nastaje *stojni val*.

1. Odredite izraz za amplitudu elementa medija na $x = 2.3 \text{ cm}$.
2. Odredite poziciju čvorova i protučvorova, ako je jedan kraj medija na $x = 0 \text{ cm}$.
 $x = n\pi/6 \text{ cm}$ uz $n = 1, 3, 5, \dots$
3. Koliki je maksimalni pomak iz položaja ravnoteže elementa medija na protučvorovima?

Rješenje U ovom problemu možemo iskoristiti rezultat (5.22) dobivamo:

$$y = (2A \sin kx) \cos \omega t = (8.0 \text{ cm}) \sin(3.0x) \cos(2.0t)$$

Amplituda JHO na poziciji $x = 2.3 \text{ cm}$ iznosi:

$$y_m = (8.0 \text{ cm}) \sin(3.0 \cdot 2.3) = 4.6 \text{ cm}$$

Mjesta čvorova i protučvorova uz $k = 2\pi/\lambda = 3.0 \text{ rad/cm}$, a valna duljina $\lambda = (2\pi/3.0 \text{ cm})$. Čvorovi su smješteni na:

$$x = n \frac{\lambda}{2} = n \frac{\pi}{3} \text{ cm} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Protučvorovi su na isti način dani s:

$$x = n \frac{\lambda}{4} = n \frac{\pi}{6} \text{ cm} \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

Amplituda na protučvorovima je dana s dvostrukim iznosom polaznih valova koji interferiraju:

$$y_m = 2A(\sin kx)_{maksimum} = 2(4.0 \text{ cm})(\pm 1) = \pm 8.0 \text{ cm}$$

gdje smo iskoristili činjenicu da su apsolutno maksimalne vrijednosti funkcije sinus ± 1 . Možemo ovaj rezultat provjeriti uvrštavanjem vrijednosti za protučvorove:

$$y_m = (8.0 \text{ cm}) \sin \left[3.0n \frac{\pi}{6} \text{ rad} \right] = (8.0 \text{ cm}) \sin \left[n \frac{\pi}{2} \text{ rad} \right] = \pm 8.0 \text{ cm}$$

Ovdje smo iskoristili činjenicu da je n neparan cijeli broj. ◀

Dodatak A

Praktična dopuna

A.1 Rješavanje problema

Započnimo s nekoliko tvrdnji koje (prema K. Willsonu) proizlaze iz prirode suvremenog okruženja zasnovana na: informaciji, inovaciji i promjeni:

1. Kao rezultat brzog razvoja tehnologije studenti inženjerskih studija više nego ikada do sada trebaju kompetencije koje su zaštitna obilježja "tvrde" znanosti.
2. Priprema koju budući student dobiva u prethodnim ciklusima obrazovanja je nedostatna za kreativno i učinkovito sudjelovanje u suvremenom kompetitivnom tehnološkom okruženju.
3. Matematika i fizika su sama srž metodologije rješavanja problema i dizajna u inženjerstvu.
4. Kolegiji iz područja fizike najbolji su teren za stjecanje vještina kako usvojiti način razmišljanja istinskog znanstvenika i inženjera.
5. Izgradnja vještina cjeloživotnoga učenja u inženjerstvu i znanosti zahtjeva usredotočenje i na meta-učenje (učenje o učenju).

Uspješna metoda rješavanja problema u fizici se sastoji od sljedećih koraka: prepoznati, postaviti, izvršiti i ocijeniti. Pažljiva provedba svakog od ovih koraka omogućava

produblјivanje promišljanja rješavanja problema za razliku izravne prečice prema formuli. Spomenimo ovdje uobičajenu frazu da je matematika jezik znanosti. Iz toga bi naivno slijedilo da vježbanje i proučavanje matematike po sebi poboljšava uspješnost u disciplinama poput fizike. Iako takva veza postoji (matematičke vještine, osobito razmišljanje, pomažu u gotovo svim intelektualnim pothvatima) ona nije jednoznačna. Korštenje matematike u znanosti, a posebice fizici, ne znači samo se baviti matematikom. U fizici matematika ima specifičnu ulogu - predstavlja sam smisao odnosa između fizičkih veličina (koje mjerimo realnim procesom) umjesto samo apstraktnih objekata. Razlika je i u načinu kako se smisao ugrađuje u apstraktne simbole. Izgleda da je jezik matematike u matematici drukčiji od matematike u fizici ili kemiji.

Krenimo od općenitog procesa rješavanja problema kakav je tipičan u fizici, a koji nam omogućava da riješimo i najsluženije probleme ukoliko smo ga sposobni pažljivo i usredotočeno provesti.

1. **Čitanje.** Pažljivo, najmanje tri puta, pročitati zadatak. To će osigurati da ste shvatili što govori tekst.
2. **Vizualizacija.** Pokušati vizualizirati opisanu situaciju - stvoriti mentalnu sliku problema.
3. **Skiciranje i prijevod.** Skicirati situaciju na papiru. Prevesti tekst u jezik fizike, a na skici označiti fizičke veličine uključujući i dodatne, koje se uklapaju u sadržaj problema, pomoću njihovih općih oznaka. Pri čitanju zapisati svaki podatak iz zadatka koristeći oznake za fizičku veličinu, brojnu vrijednost i jedinicu. Pri tome prepoznati te organizirati poznate i nepoznate veličine. Ne zaboravite zadati i koordinatne osi!
4. **Pojednostavi.** Razmislite o tome koja pojednostavnjenja možete napraviti na situaciji: možete li ignorirati veličinu objekata i promatrati ih kao čestice? Možete li ignorirati trenje? Obično, ako neka informacija o svojstvima predmeta ili interakcija nedostaje iz zadatka, znači da nije važna i možete ju ignorirati.
5. **Fizički predstavi.** To može biti dijagram gibanja, dijagram slobodnog tijela, grafikon energije, dijagram sa zrakama. Uvjerite se da je fizički reprezentacija je u skladu sa slikom i zadanim. Za crtanje fizičkog prikaza morate razmišljati koji su

fizički koncepti uključeni i koji će biti od pomoći da se riješi problem. Na primjer, da li problem uključuje koncepte energije ili sile. Ovisno o odluci trebali biste odrediti odgovarajuću fizičku reprezentaciju problema.

6. **Matematički predstavi.** Korištenjem fizičke reprezentacije konstruiraj matematički prikaz situacije. Opet, pobrinite se da je ova reprezentacija u skladu s prethodnom. Možda ćete morati koristiti dodatne definicije fizičkih veličina kao što su brzina, ubrzanje, gustoće, itd ili dinamičkih zakona koji opisuju različita međudjelovanja.
7. **Riješi.** Koristite matematičke odnose iz prethodne točke za određivanje nepoznatih veličina. Rješavati zadatak u općem obliku provodeći pažljivo i sustavno matematičke operacije do konačnog izraza. Pobrinite se da mjerne jedinice koristite dosljedno. Sve mjerne jedinice u kojima izražene vrijednosti fizičkih veličina pretvoriti u određeni sistem (npr SI). Riješiti se prefiksa iz oznake za jedinicu. Svesti sve jedinice na osnovne u odabranom sistemu te koristiti znanstvenu notaciju (posebno važno za velike/male brojeve npr umjesto 0.000023 m bolje je pisati $2.3 \times 10^{-5}\text{ m}$).
8. **Ocjeni rezultat.** Promotrite ima li kvantitativni rezultat fizičkog smisla, kako za brojčanu vrijednost, tako i za mjernu jedinicu u kojoj je izražena. Da li rezultat ima smisla i za granične slučajeve?

A.2 Pregled osnovnih vještina u fizici¹

"It is better to be roughly right than precisely wrong."

- Alan Greenspan

Znanstvena notacija U znanstvenim i inženjerskim primjenama nije rijetko da je potrebno računati s brojevima koji se razlikuju za velike iznose, redove veličina kako se to obično naziva. Ispravna organizacija izračuna je u tim slučajevima presudna za izbjegavanje pogrešaka, a praktičnije je koristiti notaciju s potencijama broja 10.

¹Materijal u ovoj cjelini je dijelom preuzet iz teksta "FIZIKA 2 - PRIRUČNIK" autora te se ovdje pojavljuje dopunjen radi važnosti teme za sva područja fizike.

Pogledajmo na dva primjera tehniku koja se preporučuje:

$$5.00 \times 10^{-3} + 4 \times 10^{-4} = 5.4 \times 10^{-3}$$

$$(5.00 \times 10^{-3})(4 \times 10^{-4}) = 2 \times 10^{-6}$$

Decimalna mjesta Budite pažljivi sa značajnim brojem decimalnih znamenki i mjesta. Pogledajmo nekoliko primjera:

$$(44.2) \cdot (9.7) = 428.74 = 430 \quad 32.21 - 5.1 = 27.11 = 27.1$$

$$(12.01) \cdot (9.7) = 116.497 = 1.2 \times 10^2 \quad 5.1 + 12 + 7.73 = 24.83 = 25$$

U ovim primjerima, prvi znak jednakosti je formalno matematički rezultat "nesvjestan" postojanja preciznosti poznavanja vrijednosti fizičke veličine. Drugi znak jednakosti uvažava fizički smisao brojeva i njegovu povezanost s točnošću i preciznošću realnog eksperimentalnog rezultata. Konvencija u fizici je da posljednja navedena znamenka u decimalnom broju nije sigurno poznata. To praktično znači da vrijedi sljedeće pravilo:

$$12.34 \text{ m} = (12.340 \pm 0.005) \text{ m}$$

Konvenciju koristimo i kod digitalnih uređaja koji se obično dizajniraju upravo na ovaj način: posljednja znamenka je nesigurna, a mjerena vrijednost je najbliža prikazanoj na zaslonu.

Jednostavne aritmetičke operacija Potrebno je da ste uspješni u računanju bez pomoći aparata. Pogledajmo primjer izračuna koji ilustrira dobru strategiju pri računanju. Pretpostavimo da računamo gravitacijsku silu između tijela mase 2.45 t i 3.25 t na udaljenosti 12.7 m. Preuzimanje vrijednosti gravitacijske konstante iz literature $6.67408 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ daje sljedeći izraz:

$$F_G = G \frac{m_1 m_2}{r^2} = (6.67408 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}) \frac{(2.45 \times 10^3 \text{ kg})(3.25 \times 10^3 \text{ kg})}{(1.27 \times 10^1 \text{ m})^2}$$

U izrazu su sve veličine prikazane u znanstvenoj notaciji uz korektno navedene mjerne jedinice. Sljedeći korak je grupiranje izraza (koristimo komutativnost množenja):

$$F_G = \frac{6.67408 \cdot 2.45 \cdot 3.25}{1.27^2} (10^{-11} \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^{-2}) (\text{m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \text{ kg}^2 \text{ m}^{-2})$$

Prvi izraz računamo uz pomoć kalkulatora, a potencije broja deset i mjerne jedinice izravno:

$$F_G = 32.94833 \times 10^{-7} \text{ kg m s}^{-2} = 3.30 \times 10^{-6} \text{ N}$$

gdje smo uvažili realnu preciznost i pravila zaokruživanja na korektan broj značajnih decimalnih znamenki.

Dimenzijska analiza Fizičke veličine se obično izražavaju u određenim mjernim jedinicama. Ova se činjenica može iskoristiti da se izravno otkrije skrivena veza među veličinama, bez izravnog poznavanja fizičkih zakonitosti koje upravljaju procesom. Pogledajmo kao primjer silu otpora polaganom gibanju kuglice kroz fluid kojeg uzrokuje unutrašnje trenje između slojeva opisana koeficijentom dinamičke viskoznosti η . Ova sila će sigurno ovisiti, pored η i o brzini gibanja kuglice v te karakterističnoj dimenziji kuglice - promjeru d . Drugih fizičkih veličina o kojima ovisi sila nema, a ako i ima sam postupak će nam pokazati jer nećemo moći izvesti relaciju.

Dakle s navedenim veličinama izraz mora imati opći oblik:

$$f_{visk} = D\eta^m v^n d^k$$

gdje nam m , n i k predstavljaju nepoznate potencije, a D je nepoznata bezdimenzionalna veličina koja ovisi o obliku tijela. Navedena relacija zapisana s pomoću mjernih jedinica (masa M , duljina L i vrijeme T) ima oblik:

$$\begin{aligned} MLT^{-2} &= (M/LT)^m (L/T)^n (L)^k = M^m L^{-m} T^{-m} L^n T^{-n} L^k \\ &= M^m L^{-m+n+k} T^{-m-n} \end{aligned}$$

korištenjem matematičkog pravila da lijeva i desna strana mogu biti jednake samo ako su sve potencije iste daje sljedeći skup jednadžbi

$$1 = m, \quad 1 = -m + n + k, \quad 2 = -m - n$$

koje je vrlo jednostavno riješiti. Rezultat je sljedeći skup vrijednosti:

$$m = n = k = 1$$

Zaključujemo da je viskozno trenje pri gibanju kuglice dano sljedećim izrazom

$$f_{visk} = D\eta v d$$

Ostaje nam odrediti broj D koji nam ovakva analiza ne može dati. Prva standardna opcija je eksperimentalno određivanje koje stoji na raspolaganju za sve oblike. Sjajni irski fizičar Sir George G. Stokes (1819.-1903.) uspio je odrediti ovu veličinu teorijski $D = 3\pi$.

Red veličine Fizičke veličine poprimaju vrijednosti zbog dubokih strukturalnih razloga. Ocjena neke veličine metodom reda veličine je postupak kojim razlog postaje vidljiv. Pokušajmo ocijeniti masu Zemlje ako poznamo sljedeće veličine: gravitacijsko ubrzanje $g = 10 \text{ ms}^{-2}$, gravitacijsku konstantu $G = 6.67384(80) \times 10^{-11} \text{ N (m/kg)}^2$ i polumjer Zemlje $R = 6371 \text{ km}$. Newton opći zakon gravitacije nam daje traženu ocjenu tako da uvrstimo vrijednosti zaokružene na potencije broja 10:

$$M = \frac{gR^2}{G} = \frac{10 \cdot 10^{2 \times 7}}{10^{-10}} \left[\frac{\text{ms}^{-2} \text{m}^2}{\text{ms}^{-2} \text{m}^2 \text{kg}^{-1}} \right] = 10^{25} \text{ kg}$$

Na ovaj način, bez korištenja kalkulatora, jednostavnom algebrom smo odredili skalu fizičke veličine o kojoj je nemoguće imati intuitivnu ocjenu zasnovanu na našem neposrednom iskustvu². Ovakvi računi nam ukazuju zašto neka veličina ima određenu vrijednost (u određenom rasponu, ovdje smo dobili otprilike 2X veću vrijednost).

Čitajte jednadžbe Vrlo korisna tehnika učenja fizike je doslovno čitanje i razumijevanje jednadžbi na hrvatskom jeziku.

Pogledajmo primjer Opći zakon gravitacije (4.1) koji glasi

$$f_G = G \frac{m m'}{r^2}$$

iz čega se možemo uvjeriti da je

Prvo Udvostručenje bilo koje mase udvostručit će iznos sile.

Drugo Udvostručenje udaljenosti između masa smanjit će iznos sile $4\times$.

Kao što vidite izgovarajući vezu između veličina možemo osvijestiti niz činjenica i stvarni sadržaj matematičkih izraza koji kvantitativno opisuju prirodne fenomene.

²Precizna vrijednost mase Zemlje je $5.972 \times 10^{24} \text{ kg}$

Vrlo je važno da možete bez napora sebi artikulirati preciznim rečenicama matematički i fizički sadržaj jednadžbi. U principu je ova tehnika lakša nego što se možda čini jer je ova vježba sve lakša opetovanom primjenom na nove izraze.

Primjer A.1 (ZO). Želite postaviti parket u pravokutnu prostoriju čije su izmjerene dimenzije 10.51 m X 4.46 m. Ako je potrebno 10% više parketa od površine koliko ćete kvadrata naručiti?

Rješenje Množenjem duljina stranica dobivamo površinu:

$$(10.51 \text{ m}) \times (4.46 \text{ m}) = 46.8746 \text{ m}^2$$

U zadatku se traži 10% veća površina. Obzirom da to znači množenje dobivene vrijednosti s 1.1, a broj je matematička konstanta koju znamo apsolutno točno, prije analize konačne preciznosti obavljamo i to množenje:

$$1.1 \times (46.8746 \text{ m}^2) = 51.56206 \text{ m}^2$$

Koliko je značajnih decimalnih mjesta u konačnom rezultatu? Prije smo napomenuli da rezultat množenja mjerenih veličina ne može biti precizniji od faktora koji je najmanje preciznosti, a ovdje je to 4.46 m s 3 značajne decimalne znamenke. Konačan rezultat je prema tome:

$$51.6 \text{ m}^2$$

Primjer A.2 (ZO). Potrebno je odrediti volumen spremnika oblika valjka s bazom promjera 14.7 dm i visine 7.0 m. Rezultat izrazite s korektnim brojem značajnih decimalnih znamenki.

Rješenje Volumen valjka izračunamo množenjem površine baze (B) i visine h :

$$V = B h = \pi \frac{d^2}{4} h = \frac{\pi}{4} (14.7 \text{ dm})^2 \times (7.0 \text{ m}) = \frac{3.14159265359}{4} (14.7 \cdot 0.1 \text{ m})^2 \times (7.0 \text{ m}) = 11.88016824 \text{ m}^3$$

π je matematička konstanta koju znamo apsolutno točno, a ovdje smo uzeli dovoljan broj decimalnih znamenki tako da preciznost koju koristimo ne utječe na konačni rezultat. Kao i u prethodnom zadatku rezultat množenja mjerenih veličina ne može biti

precizniji od faktora koji je najmanje preciznosti, a ovdje je to $7.0 m$ s 2 značajne decimalne znamenke. Konačan rezultat je prema tome:

$$12 m^3$$

Primjer A.3 (ZO). Procijenite broj udaha i izdaha u životu čovjeka.

Rješenje Pretpostavimo da je prosječan život 80 god. Potrebno je još procijeniti frekvenciju udaha. Najjednostavnije je procjenu napraviti promatrajući jednu minutu. Frekvencija je različita za različite vrste aktivnosti i među osobama, ali se pretežno kreće u rasponu 8-14. U ovom izračunu ćemo uzeti vrijednost 10 udaha/min.

$$1 \text{ god} = (1 \text{ god}) \frac{400 \text{ dana}}{1 \text{ god}} \frac{25 \text{ h}}{1 \text{ dan}} \frac{60 \text{ min}}{1 \text{ sat}} = 6 \times 10^5 \text{ min}$$

Vjerojatno ste uočili da smo umjesto precizne vrijednosti 364×24 koristili 400×25 jer je jednostavnije računati, a konačan rezultat ionako možemo znati samo do na red veličine tako da je dostatna jedna značajna decimalna znamenka.

$$(80 \text{ god}) \cdot (6 \times 10^5 \text{ min/god}) \cdot (10 \text{ udaha/min}) = 5 \times 10^8 \text{ udaha}$$

Dakle red veličine iznosi oko 10^9 udaha.

Primjer A.4 (ZO). Procijenite godišnju potrošnju fosilnih goriva na osobne automobile (1.7 miliona 2018.god.), ako u Hrvatskoj dnevno putujemo prosječno 23 km, a 2/3 otpada na vožnju automobilom (uzmite da se prosječno troši 8 l/100 km)!

Rješenje Godišnje automobil prijeđe:

$$360 \times (23 \text{ km}) \times \frac{2}{3} = 5500 \text{ km}$$

Automobil prosječno troši godišnje

$$(5500 \text{ km}) \times (8 \text{ l}/100 \text{ km}) = 440 \text{ l}$$

Ukupna potrošnja goriva iznosi:

$$(440 \text{ l}) \times (1.7 \times 10^6) = 750 \times 10^6 \text{ l} \simeq 10^9 \text{ l}$$

Prema javno dostupnim podacima u RH se na tržište 2015.god. stavio dvostruko veći volumen tekućih naftnih goriva. Pretpostavimo li da je udio potrošnje osobnih automobila ispod 1/2 konačni rezultat je prilično precizna ocjena stvarnog stanja.

Bibliografija

- [1] Douglas Brown. *Tracker free video analysis and modeling tool built on the Open Source Physics (OSP)*. <https://physlets.org/tracker/>. Accessed: 2019-12-01 (cit. na str. 23).
- [2] Robert W. Cahn. „Has the Child of Metallurgy Walked Out on Its Parent?": *MRS Bulletin* 28.7 (2003.), str. 468–469. DOI: 10.1557/mrs2003.132 (cit. na str. 2).
- [3] Nikola Cindro. *Fizika 1*. Zagreb: Školska knjiga, 1991. (cit. na str. 2, 62).
- [4] Petar Kulišić. *Mehanika i toplotina*. 7. Školska knjiga, 1995. (cit. na str. 2).

Kazalo

- 1D gibanje, 9
- 2D gibanje, 26
- Atwoodov padostroj, 50, 68
- brzina, 10, 14
 - 2D, 26
- centar mase, 87
 - potencijalna energija, 89
 - zakoni gibanja, 89
- centripetalno ubrzanje, 40
- čvor, 136
- dijagram slobodnog tijela, 43
- dijagrami gibanja, 13
- elastičnost, 101
 - istezanje, 101
 - jednoosno istezanje, 101
 - smicanje, 102
 - torzija, 103
 - volumno naprezanje, 102
- energija, 64
 - kinetička, 67
 - konverzija, 67, 76
 - okoliš, 66
 - sistem, 66
 - zatvoreni sistem, 66
- geostacionarna orbita, 83
- gravitacija
 - opći zakon, 81
- Harmonički oscilator, 114
- impuls sile, 59
- inercijalni sustavi, 33
- interferencija, 126
- jednoliko gibanje, 10
- jednoliko ubrzano gibanje, 16, 18
- kinetička energija, 67
- koeficijent restitucije, 64
- količina gibanja, 59
- kosi hitac, 31
- kružno gibanje, 36
- kutna brzina, 38
- moment inercije, 85
- moment sile, 90
- Newtonovi zakoni, 43
- OSP, 2
- očuvanje količine gibanja, 60
- PhET simulacija, 2
- položaj, 10, 14
- potencijalna energija, 89
- Pravilo desne ruke, 40
- protučvor, 137

-
- relativno gibanje, 35
 - sila, 42
 - snaga, 69
 - statika, 101
 - teorem rada i kinetičke energije, 67
 - titranje, 113
 - energija, 115
 - fizičko njihalo, 120, 122
 - gušenje, 123
 - matematičko njihalo, 120
 - ubrzanje, 26
 - srednje, 17
 - valovi, 125
 - brzina, 128
 - energija, 133
 - interferencija, 126
 - model, 126
 - snaga, 133
 - stojni valovi, 136
 - protučvor, 137
 - čvor, 136
 - vertikalni hitac, 20
 - vlačna čvrstoća, 102
 - vrtnja, 84
 - dinamika, 92
 - energija, 93
 - kotrljanje, 94
 - kutna količina gibanja, 93
 - moment količine gibanja, 93
 - moment sile, 90
 - zakoni gibanja, 89
 - zatvoreni sistem, 66